CAREER POINT

# JEE Advanced Exam 2024
# (Paper & Solution)

Date : 26 / 05 / 2024

## PAPER-2

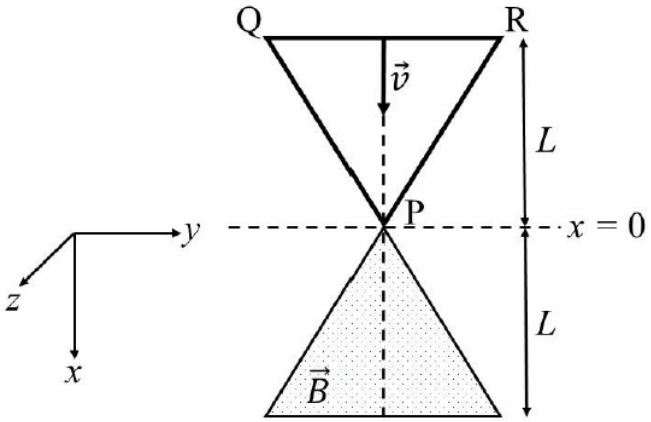
## PHYSICS

### SECTION – 1 (Maximum Mark : 12)

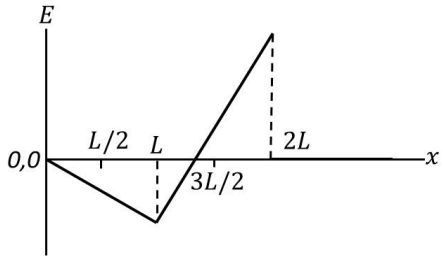
- This section contains **FOUR (04)** questions.
- Each question has four options (A), (B), (C) and (D). **Only one** of these four option is the correct answer.
- For each question, choose the option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

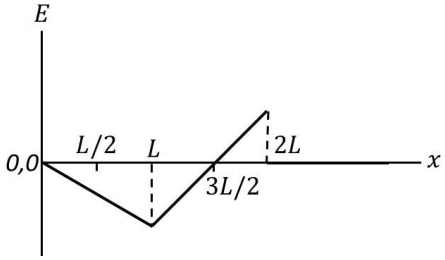
| | | |
|---|---|---|
| Full Marks | : **+3** | If **ONLY** the correct option is chosen; |
| Zero Marks | : **0** | If none of the option is chosen (i.e. the question is unanswered); |
| Negative Marks | : –1 | In all other cases. |

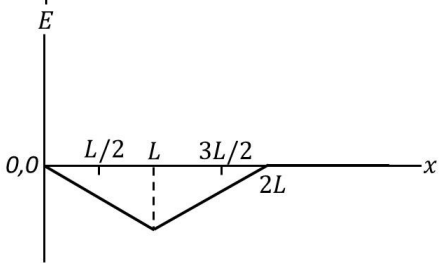
**Q.1** x-y समतल में स्थित $L$ ऊंचाई के एक समबाहु त्रिभुजाकार क्षेत्र के अन्दर +z-दिशा में एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B}$ है। इसी x-y समतल पर उसी L ऊंचाई का एक समबाहु त्रिभुजाकर चालक लूप PQR को रखा है जिसका P शीर्ष, चित्र में दिखाए गये अभिविन्यास के अनुसार $x = 0$ पर है। समय $t = 0$ पर, लूप, +x-दिशा में एकसमान वेग $\vec{v}$ से चुम्बकीय क्षेत्र में प्रवेश करना प्रारम्भ करता है। इस गति के दौरान के दौरान लूप का तल और अभिविन्यास अपरिवर्तित रहते हैं।

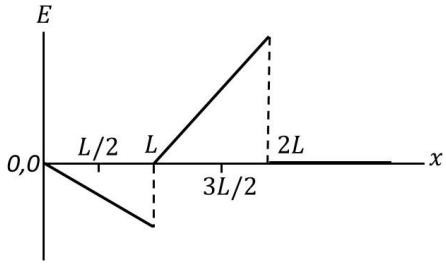



निम्न में से कौन सा ग्राफ x = 0 से प्रारंभ करते हुए, लूप में उत्पन्न हुए विद्युत वाहक बल ($E$) का दूरी (x) के साथ फलन, सबसे उचित रूप से दर्शाता है ?

(A)


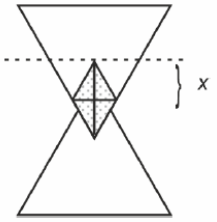

(B)



(C)



(D)



**Ans.** **[A]**

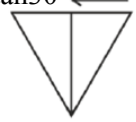
**Sol.** $x < L$ के लिए




क्षेत्रफल $= \frac{x}{2}\ \frac{x}{2} \tan 30 \times 4 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^2\tan30$

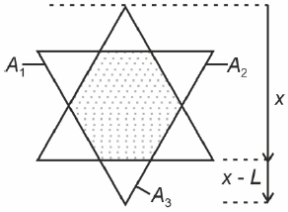
$\phi' = B_0 x \tan30 V$ $\boxed{\varepsilon \propto x}$

$L \tan30°$ ⟵



जज

$x \geq L$




क्षेत्रफल $= A_0 - A_1 - A_2 - A_3$

$= A_0 - 2A_1 - (x - L)(x - L)\tan30$

$= A_0 - (x - L)^2\tan30 - \{L \tan 30 - (x - L)\tan30°\}^2\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\tan 60° \times 2$

$= A_0 - (x - L)^2\ \tan30° - \tan30°\{2L - x\}^2\ \frac{1}{2}$

$\varepsilon' = -2(x - L)\tan30V - \tan30\ 2(2L - x)(-)V$

$= (4L - x - 2x + 2L)\tan30°V$

$= (4L - 3x)V$

$\boxed{= 0 \text{ at } x = \frac{4L}{3}}$

1 व 2 से

$1.33 < 1.5$

**Q.2** द्रव्यमान m का एक कण द्रव्यमान M (>> m) के एक पिंड के गुरूत्वाकर्षण क्षेत्र के प्रभाव में है। यह कण $r_0$ त्रिज्या की एक वृत्ताकार कक्षा में M के परितः आवर्तकाल $T_0$ से परिक्रमण कर रहा है। अब कण पर एक अतिरिक्त केन्द्रीय बल, जिसके संगत स्थितिज ऊर्जा $V_c(r) = m\alpha/r^3$ है लगाया जाता है, जहाँ $\alpha$ एक धनात्मक नियतांक है तथा r उसी कक्षा के केंद्र से दूरी है। यदि कण अब उसी त्रिज्या $r_0$ की कक्षा में M तथा $V_c(r)$ के संयुक्त विभव के अंतर्गत एक नए आवर्तकाल $T_1$ से परिक्रमण करता है तो, $(T_1^2 - T_0^2)/ T_1^2$ का मान है, [G गुरूत्वीय नियतांक है]

(A) $\frac{3\alpha}{GMr_0^2}$ (B) $\frac{\alpha}{2GMr_0^2}$ (C) $\frac{\alpha}{GMr_0^2}$ (D) $\frac{2\alpha}{GMr_0^2}$

**Ans.** **[A]**

**Sol.** $$\frac{Gmm}{r_0^2} - \frac{3\alpha m}{r_0^4} = \frac{mv^2}{r_0}$$

$$T = \frac{2\pi r_0}{\sqrt{\frac{Gm_0^2 - 3\alpha}{r_0^3}}}$$

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2}{Gm} r_0^3$$

$$\frac{T^3 - T_0^2}{T_1^2} = 1 - \frac{T_0^2}{T_1^2}$$

$$= 1 - \frac{4\pi^2}{Gm}\frac{r_0^3}{4\pi^2 r_0^2}\frac{Gmr_0^2 - 3\alpha}{r_0^3}$$

$$= 1 - 1 + \frac{3\alpha}{Gmr_0^2}$$

$$= \frac{3\alpha}{Gmr_0^2}$$

**Q.3** परमाणु क्रमांक (atomic number) Z = 46 के धातु के एक लक्ष्य (target) पर उच्च ऊर्जा का एक इलेक्ट्रॉन पुंज प्रहार करता है। इस लक्ष्य से उत्पन्न X-किरणों का विश्लेषण किया जाता है। इससे $K_\alpha$-रेखा तथा अंतक (cut-off) तरंगदैर्ध्यों का अनुपात r = 2 पाया जाता है। वही इलेक्ट्रॉन पुंज यदि Z = 41 की एक दूसरी धातु के लक्ष्य पर प्रहार करे, तो r का मान होगा

(A) 2.53 (B) 1.27 (C) 2.24 (D) 1.58

**Ans.** **[A]**

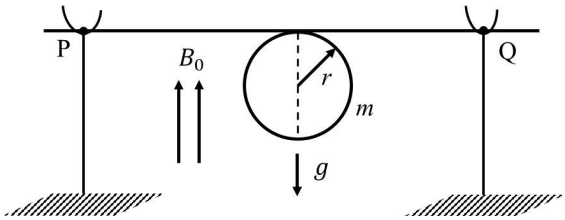
**Sol.** $$\frac{1}{\lambda_\alpha} = \frac{3}{4}R(Z-1)^2 p$$

$$\lambda_{cut} = \frac{hc}{eV}$$

$\Rightarrow$ समान पुंज के लिए अनुपात $\propto \frac{1}{(Z-1)^2}$

$$\frac{r}{r_{new}} = \frac{40^2}{45^2} \Rightarrow r_{new} = \frac{45^2}{40^2} \times 2 \approx 2.53$$

**Q.4** विद्युतरोधी परत चढ़े एक धातु के पतले एवं कड़े तार को मोड़कर एक वृत्ताकार वलय बनाया जाता है, जिसके दो सिरे वलय के ही एक बिंदु से उसकी स्पर्श रेखीय दिशा में सीधे निकले हैं। इस वलय का द्रव्यमान m तथा त्रिज्या r है तथा यह एक ऊर्ध्वाधर दिशा में ऊपर की ओर लगे एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र $B_0$ में, चित्रानुसार, है। आरम्भ में यह तार दो दृढ़ चालक स्तंभों, P और Q, पर गुरूत्वीय त्वरण g के कारण ऊर्ध्वाधर लटक रहा है। जब वलय में धारा I प्रवाहित की जाती है तो वलय, रेखा PQ के परितः निम्नप्रकार दिए कोण $\theta$ से घूम जाएगा

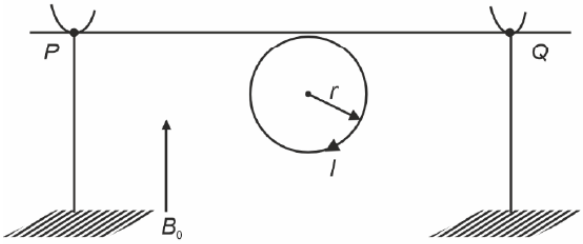


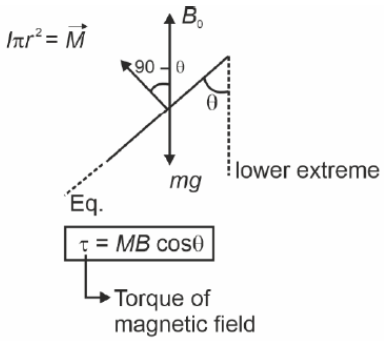

(A) $\tan\theta = \pi r I B_0/(mg)$ (B) $\tan\theta = 2\pi r I B_0/(mg)$

(C) $\tan\theta = \pi r I B_0/(2mg)$ (D) $\tan\theta = mg/(\pi r I B_0)$

**Ans.** **[A]**

**Sol.**




अब संतुलनावस्था के लिये

$\tau = mg\, r \sin\theta$

$I\pi r^2 B_0 \cos\theta = mgr \sin\theta$

$$\boxed{\tan\theta = \frac{I\pi r B_0}{mg}}$$

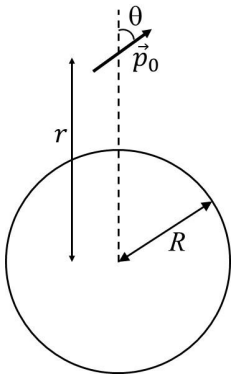
## SECTION – 2 (Maximum Mark : 12)

- This section contains **THREE (03)** questions
- Each question has **FOUR** options (A), (B), (C) and (D). **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated <u>according to the following marking scheme</u> :

| | | |
|---|---|---|
| Full Marks | : **+4** | **ONLY** If (all) the correct option(s) is (are) chosen. |
| Partial Marks | : **+3** | If all the four options are correct but **ONLY** three options are chosen. |
| Partial Marks | : **+2** | If three or more options are correct but **ONLY** two options are chosen, both of which are correct. |
| Partial Marks | : **+1** | If two or more options are correct but **ONLY** one option is chosen and it is a correct option. |
| Zero Marks | : **0** | If unanswered; |
| Negative Marks | : **–2** | In all other cases. |

- For example, in a question, if (A), (B) and (D) are the ONLY three options corresponding to correct answers, than
  choosing ONLY (A), (B) and (D) will get +4 marks;
  choosing ONLY (A) and (B) will get +2 marks;
  choosing ONLY (A) and (D) will get +2 marks;
  choosing ONLY (B) and (D) will get +2 marks;
  choosing ONLY (A) will get +1 mark;
  choosing ONLY (B) will get +1 mark;
  choosing ONLY (D) will get +1 mark;
  choosing no option(s) (i.e. the question is unanswered) will get 0 marks and choosing any other option(s) will get –2 marks.

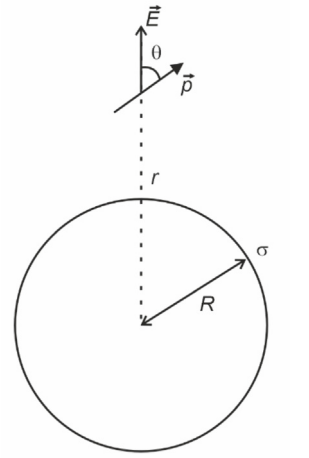
**Q.5** एक सूक्ष्म विद्युत द्विध्रुव $\vec{p}_0$ जिसका अपने केंद्र के परितः जड़त्व आघूर्ण I है, को त्रिज्या R की एक गोलीय सतह के केंद्र से r दूरी पर रखा गया है। इस गोलीय सतह पर एकसमान क्षेत्रीय आवेश घनत्व $\sigma$ हैं। इस द्विध्रुव को आरम्भ में चित्रानुसार एक सूक्ष्म कोण $\theta$ पर रखा है। यह द्विध्रुव दूरी r पर स्थिर रहते हुए अपने केंद के परितः धूर्णन के लिए स्वतंत्र है।




यदि इसे स्थिर अवस्था से छोड़ा जाता है तो निम्न में से कौनसा/से कथन सही है (हैं)?
[$\varepsilon_0$ मुक्त आकाश की विद्युतशीलता है।]
(A) किसी भी परिमित दूरी r पर द्विध्रुव लघु दोलन करेगा
(B) किसी भी परिमित दूरी $r > R$ के लिए द्विध्रुव लघु दोलन करेगा।
(C) यदि $r = 2R$ हो तो द्विध्रुव $\sqrt{\frac{2\sigma p_0}{\epsilon_0 I}}$ कोणीय आवृत्ति से लघु दोलन करेगा।
(D) यदि $r = 10R$ हो तो द्विध्रुव $\sqrt{\frac{\sigma p_0}{100\,\epsilon_0 I}}$ कोणीय आवृत्ति से लघु दोलन करेगा।

**Ans.** **[B,D]**

**Sol.**




$$\tau = \left|\vec{p}\times\vec{E}\right|$$

$$I\alpha = p_0 E\sin\theta$$

$$\alpha = \frac{p.\theta}{I}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 4\pi R^2}{r^2}\right)$$

$$\alpha = \left(\frac{p_0\sigma R^2}{I\varepsilon_0 r^2}\right).\theta$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{p_0 \sigma R^2}{I \varepsilon_0 r^2}}$$

r = 2R के लिये

$$\omega = \sqrt{\frac{p_0 \sigma}{4 I \varepsilon_0}}$$ (C असत्य है)

r = 10R के लिये

$$\omega = \sqrt{\frac{p_0 \sigma}{I \in_0 (100)}}$$ (D सत्य है)

यह r > R के किसी भी परिमित मान के लिये दोलन करेगा ( B सत्य है)

**Q.6** टेबल टेनिस की एक गेंद की त्रिज्या $(3/2) \times 10^{-2}$ m तथा द्रव्यमान $(22/7) \times 10^{-3}$ kg है। इसे एक तरण ताल (swimming pool) में धीरे-धीरे पानी की सतह से गहराई d = 0.7 m तक ले जाकर स्थिर अवस्था से छोड़ते हैं। यह गेंद, बिना पानी से भीगे हुए, पानी की सतह से चाल v से बाहर आती है और ऊंचाई H तक जाती है। निम्न में से कौनसा/से विकल्प सही है (हैं)?

[दिया है: $\pi = 22/7$, $g = 10\ m\ s^{-2}$, पानी का घनत्व $= 1 \times 10^3\ kg\ m^{-3}$, पानी की श्यानता $= 1 \times 10^{-3}$ Pa-s.]

(A) गेंद को गहराई d तक ले जाने में किया गया कार्य 0.077 J है।

(B) यदि पानी में लगे श्यान बल को नगण्य मानें तो चाल v = 7 m/s है।

(C) यदि पानी में लगे श्यान बल को नगण्य मानें तो ऊँचाई H = 1.4 m है।

(D) पानी में, श्यान बल को छोड़कर, लगे कुल बल के परिमाण का अधिकतम श्यन बल के सापेक्ष अनंपात 500/9 है।

**Ans.** **[A,B,D]**

**Sol.** गेंद को धक्का देने में किया गया कार्य

$W = (v\rho g)d - (v\sigma g)d$

जहां $\rho \rightarrow$ जल का घनत्व

$\sigma \rightarrow$ गेंद का घनत्व

$$\Rightarrow W = \frac{4}{3}\pi R^3 \times 10 \times 0.7 \left[1000 - \frac{3}{4} \times \frac{10^{-3}}{R^3}\right]$$

$$\boxed{W = 0.077 J}$$ [A सत्य है]

$\Rightarrow$ जब गेंद को पेंदें से मुक्त किया जाता है तब गेंद पर समान कार्य (i.e. 0.077 J) किया जाता है

$$\therefore \frac{1}{2} m v^2 = 0.077$$

$$v = \sqrt{\frac{0.077 \times 2}{\frac{22}{7} \times 10^{-3}}}$$

$= 7$ m/s [B सत्य है]

$$\Rightarrow \text{also, } H = \frac{v^2}{2g} = \frac{7 \times 7}{2 \times 10} = 2.45 \text{ m}$$ [C असत्य है]

$\Rightarrow$ कुल बल $F_{net} = v\rho g - v\sigma g = 0.11$ N

श्यान बल अधिकतम होता है जब v = 7 m/s.

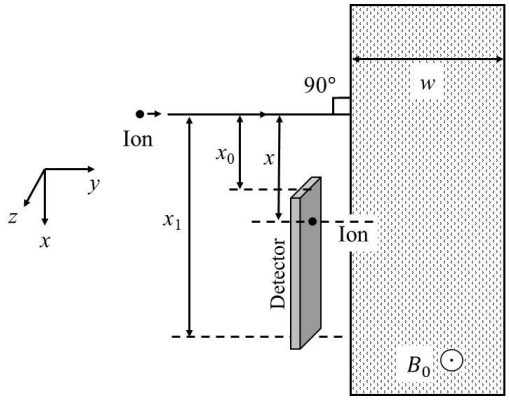
$$\therefore (F_v)_{max} = 6\pi\eta r v = 6 \times \frac{22}{7} \times 10^{-3} \left(\frac{3}{2} \times 10^{-2}\right) \times 7 = 18 \times 11 \times 10^{-5} \text{ N}$$

अब,

$$\frac{F_{net}}{(F_v)_{max}} = \frac{500}{9}$$ [D सत्य है]

**Q.7** द्रव्यमान संख्या $A_M$ के एक धनात्मक एकल आयनित (singly ionized) परमाणु को विरामावस्था से, विभवान्तर 192 V द्वारा त्वरित किया जाता है जिसके बाद वह एक चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B}_0 = 0.1\hat{k}$, युक्त w चौड़ाई के एक आयताकार क्षेत्र में, चित्रानुसार प्रवेश करता है। अंततः यह आयन एक संसूचक (detector) पर अपने आरंभिक पथ से नीचे दूरी x पर टकराता है।

[दिया है: न्यूट्रॉन/प्रोटोन का द्रव्यमान $= (5/3) \times 10^{-27}$ kg, इलेक्ट्रॉन का आवेश $= 1.6 \times 10^{-19}$ C.]




निम्न में से कौन सा/से विकल्प सही है (हैं)?

(A) $H^+$ आयन के लिए x का मान 4 cm है।

(B) $A_M = 144$ के आयन के लिए x का मान 48 cm है।

(C) $1 \le A_M \le 196$ के आयनों को संसूचित करने के लिए संसूचक की ऊँचाई $(x_1 - x_0)$ का न्यूनतम मान 55 cm हैं।

(D) $A_M = 196$ के आयन को संसूचित करने के लिए चुम्बकीय क्षेत्र वाले आयत की न्यूनतम चौड़ाई w का मान 56 cm है।

**Ans.** **[A,B]**

**Sol.** $x = 2R$

$$x = 2\frac{mv}{qB}$$

$$x = 2\frac{\sqrt{2m(e\Delta V)}}{qB}$$

For $H^+$ ion

$x = 3.91$ cm

$\simeq$ 4 cm (A सत्य है)

For $m = 144\ (m_P)$

$= 12\left(x_{H^+}\right)$

$= 48$ cm (B सत्य है)

For $1 \le A_M \le 196$

$\Rightarrow (x_1 - x_0)_{min} = 2R_{196} - 2R_1$

$= (14 \times 4) - 4$

$= 52$ cm (C सत्य है)

For $A_M = 196$

$w_{min} = R_{196} = 28$ cm (D असत्य है)

## SECTION – 3 (Maximum Marks: 24)

- This section contains **SIX (06)** questions.
- The answer to each question is a **NON-NEGATIVE INTERGER.**
- Four each question, enter the correct integer corresponding to the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

| | | |
|---|---|---|
| Full Marks | : **+4** | If **ONLY** the correct integer is entered; |
| Zero Marks | : **0** | In all other cases. |

---

**Q.8** एक शंकु की विमायें अल्पत्मांक 2 mm एक एक पैमाने से मापे जाने पर उसके आधार का व्यास तथा ऊँचाई, दोनों 20.0 cm पाये जाते हैं। इस शंकु का आयतन ज्ञात करने में अधिकतम प्रतिशत त्रुटि का मान _____ होगा।

**Ans.** **[3]**

**Sol.** $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

$\Rightarrow \frac{dV}{V} = 2.\frac{dR}{R} + \frac{dH}{H}$

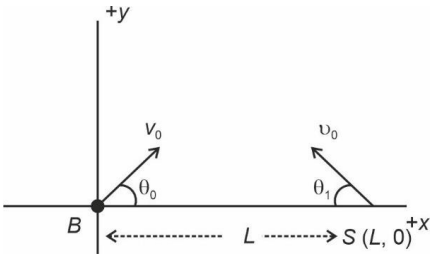
$\Rightarrow$ आयतन के मापन में प्रतिशत त्रुटि

$= \left[2\times\frac{0.2}{20} + \frac{0.2}{20}\right]\times 100 = 3$

**Q.9** क्षैतिज खेल के मैदान के एक बिंदु $(x_0, y_0) = (0, 0)$ से एक गेंद +x-दिशा में $\theta_0$ कोण पर प्रारंभिक चाल $v_0$ से फेंकी जाती है। गेंद को एक पत्थर से टकराना है जो उसी क्षण बिंदु $(x_1, y_1) = (L, 0)$ से फेंका जाता है। पत्थर को उचित प्रारंभिक चाल से एवं x-दिशा से $(180 - \theta_1)$ के कोण पर फेंका जाता है। एक नियत $v_0$ के लिए, जब $(\theta_0, \theta_1) = (45°, 45°)$, तो पत्थर $T_1$ समय पश्चात् तथा जब $(\theta_0, \theta_1) = (60°, 30°)$, तो पत्थर $T_2$ समय पश्चात्, गेंद से टकराता है। इस दशा में $(T_1/T_2)^2$ _____ है।

**Ans.** **[2]**

**Sol.**




माना कि B : गेंद , S : पत्थर

$\upsilon_0$ : पत्थर की आरम्भिक चाल

क्योंकि आपेक्षिक त्वरण = शून्य

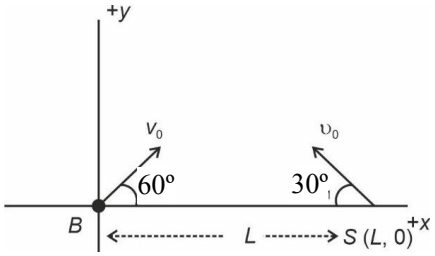
$\Rightarrow$ देखा गया पथ एक सरल रेखा होगा

$\Rightarrow$ मिलने के लिए, $v_0 \sin\theta_0 = v_0 \sin\theta_1$

तथा $\Delta t = \frac{L}{\upsilon_0 \cos\theta_1 + v_0 \cos\theta_0}$

स्थिति I : $\upsilon_0 = v_0 \Rightarrow \Delta t_1 = T_1 = \frac{L}{v_0\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right]} = \frac{L}{\sqrt{2}v_0}$

स्थिति II :




$v_0 \sin 60^\circ = \upsilon_0 \sin 30^\circ$

वेग के उर्ध्व घटक बराबर होगे

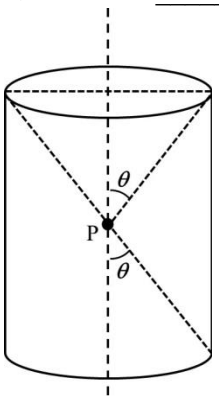
$$v_0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \upsilon_0 \times \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{3}v_0 = \upsilon_0$$

$$\Rightarrow \Delta t_2 = T_2 = \frac{L}{\sqrt{3}v_0 . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{v_0}{2}} = \frac{L}{2v_0}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

**Q.10** एक आवेश को एक बेलनाकार क्षेत्र के केंद्र बिंदु P पर चित्रानुसार रखा गया है जिससे बेलन के दो छोर, बिंदु P पर $\theta$ अर्ध-कोण अंतरित करते हैं। जब $\theta = 30^\circ$ तो बेलन के बेलनाकार पृष्ठ से विद्युत फ्लक्स (flux) $\Phi$ है। यदि $\theta = 60^\circ$, तो बेलनाकार पृष्ठ से विद्युत फ्लक्स $\Phi/\sqrt{n}$ है, जहाँ n का मान _____ हैं।




**Ans.** **[3]**

**Sol.** $\theta$ के किसी मान के लिये, सबसे पहले $\theta$ अर्ध कोण के शीर्ष के अंदर से निर्गत फलक्स ज्ञात करें हम जानते है कि इस प्रकार के शंकु के लिये केंद्र पर अन्तरित ठोस कोण $\Omega = 2\pi\,[1 - \cos\theta]$ होता है

$$\Rightarrow \text{शंकु 1 से निर्गत फलक्स} = \phi_0 = \frac{\Omega}{4\pi} . \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0}[1 - \cos\theta]$$

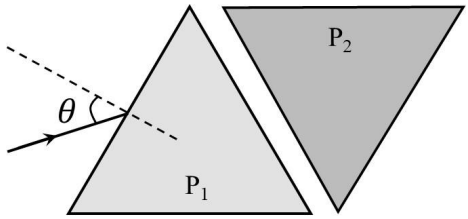
$\Rightarrow$ वक्रीय सतह से निर्गत फलक्स

$$= \frac{Q}{\varepsilon_0} - 2\phi_0$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon_0} - \frac{Q}{\varepsilon_0}\,[1 - \cos\theta] = \frac{Q}{\varepsilon_0}\cos\theta$$

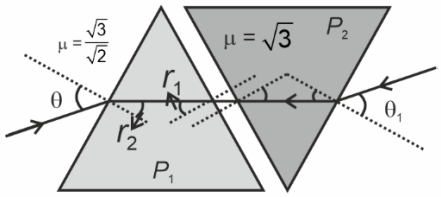
$$\Rightarrow \phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} . \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ तथा } \frac{\phi}{\sqrt{n}} = \frac{Q}{\varepsilon_0} . \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{n} = \sqrt{3} \Rightarrow n = 3$$

**Q.11** दो समबाहु त्रिभुजाकार प्रिज्मों, $P_1$ एवं $P_2$ को एक दूसरे की भुजाओं के समानांतर, निर्वात में चित्रानुसार रखा गया हैं। प्रकाश की एक किरण, प्रिज्म $P_1$ पर आपतन कोण $\theta$ से इस तरह से आपतित होती है कि बाहर जाती हुयी किरण का प्रिज्म $P_2$ द्वारा अल्पतम विचलन होता है। यदि $P_1$ एवं $P_2$ के अपवर्तनांक, क्रमशः $\sqrt{\frac{3}{2}}$ तथा $\sqrt{3}$, तो $\theta = \sin^{-1}\left[\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{\beta}\right)\right]$ है, जहाँ $\beta$ का मान _____ हैं।




**Ans.** **[12]**

**Sol.** प्रकाशिय उत्क्रमणता सिद्धांत का उपयोग करने पर




प्रिज्म $P_2$ के लिये :

→ न्यूनतम विचलन

$1 \times \sin\theta_1 = \sqrt{3}\sin r \qquad r_1 = r_2 = \frac{A}{2}$

$\sin\theta_1 = \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \qquad r_1 = r_2 = 30^\circ \Rightarrow i = e = 60^\circ$

प्रिज्म $P_1$ के लिये :

आपतित कोण $60^\circ$ होगा

$1 \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin r_1$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin r_1$

$r_1 + r_2 = 60^\circ$

$\sin r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \boxed{r_1 = 45^\circ}$

$r_2 = 15^\circ$

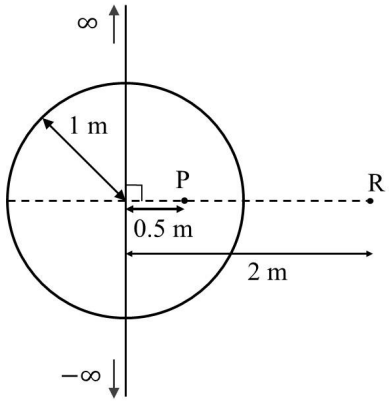
$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin(45^\circ) = 1 \times \sin\theta$

$15^\circ = \frac{\pi \times 15}{180}\text{ rad} = \frac{\pi}{12}\text{ rad}$

$\theta = \sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] \Rightarrow \boxed{\beta = 12}$

**Q.12** अनंत लम्बाई का एक पतला तार, जिसका एकसमान रेखीय आवेश घनत्व 5 nC/m है, को 1 m त्रिज्या की एक गोलीय सतह को भेदकर, चित्रानुसार रखा है। गोलीय सतह पर 10 nC आवेश एकसमान रूप से वितरित है। यदि आवेशों का अभिविन्यास स्थैतिक है, तो बिंदुओं P तथा R के बीच के विभवान्तर का वोल्ट में परिमाण _____ होगा।

[दिया है: SI इकाई में $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$, $\ln 2 = 0.7$; तार द्वारा छेदित क्षेत्र नगण्य मानिये।]




**Ans.** **[171]**

**Sol.** $E_{\text{Line charge}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

$$\Rightarrow \Delta V_{\text{Line charge}} = \int_{0.5}^{2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi \in_0} \ell n4 \qquad \ldots (i)$$

$$\Delta V_{\text{Sphere}} = \frac{1}{4\pi \in_0}\frac{Q}{R} - \frac{1}{4\pi \in_0}\frac{Q}{2R}$$

$$= \frac{1}{4\pi \in_0}\frac{Q}{2} \qquad \ldots (ii)$$

$$\Rightarrow \Delta V_{\text{Net}} = \frac{\lambda}{2\pi \in_0} \ell n4 + \frac{1}{4\pi \in_0}\frac{Q}{2}$$

$$= 171 \text{ Volts}$$

**Q.13** दाब $P_0 = 10^5$ Pa के एक वायु कोष्ठ (air chamber) के अन्दर किसी त्रिज्या का साबुन का एक गोलाकार बुलबुला है जिसके अन्दर अतिरिक्त दाब (excess pressure) $\Delta P = 144$ Pa हैं। अब कोष्ठ का दाब घटाकर $8P_0/27$ कर दिया जाता है जिससे बुलबुले की त्रिज्या तथा अतिरिक्त दाब बदल जाते हैं। इस प्रक्रिया में सभी तापमान अपरिवर्तित रहते हैं। वायु को आदर्श गैस मानिये तथा दोनों स्थितियों में अतिरिक्त दाब $\Delta P$ का मान कोष्ठ दाब से नगण्य मानिये। नए अतिरिक्त दाब $\Delta P$ का Pa में मान _____ होगा।

**Ans.** **[96]**

**Sol.** क्योंकि दी गई स्थिति समतापीय शर्त का अनुसरण करती है

$P_1V_1 = P_2V_2$

$V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3$, $V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3$

$P_1 = P_2 + \Delta P_1$, $\Delta P_1 = \frac{4T}{R_1}$

तथा $P_2 = \frac{8P_0}{27} + \Delta P_2, \Delta P_2 = \frac{4T}{R_2}$

इसलिए समतापीय स्थिति के लिये

$$(P_0 + \Delta P_1) \times \frac{4}{3}\pi R_1^3 = \left(\frac{8P_0}{27} + \Delta P_2\right) \times \frac{4}{3}\pi R_2^3$$

यहां $P_0 = 10^5$ Pa

$\Delta P_1 = 144$ Pa

तथा $\Delta P_1 << P_0$

इसलिए $(P_0 + \Delta P_1)\left(\frac{4T}{\Delta P_1}\right)^3 = \left(\frac{8P_0}{27} + \Delta P_2\right)\left(\frac{4T}{\Delta P_2}\right)^3$

$$\frac{P_0}{(\Delta P_1)^3} \approx \frac{8P_0}{27} \times \frac{1}{(\Delta P_2)^3}$$

$$\Delta P_2 = \frac{2}{3}\Delta P_1 = \frac{2}{3} \times (144 \text{ Pa})$$

$\Delta P_2 = 96$ Pa

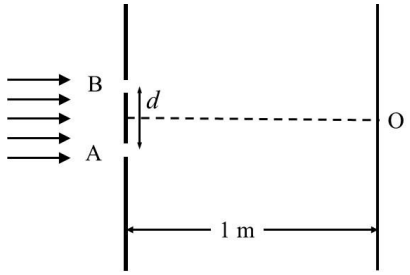
## SECTION – 4 (Maximum Marks: 12)

- This section contains **TWO (02)** paragraphs.
- Based on each paragraph, there are TWO (02) questions.
- The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE.**
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- If the numerical value has more than two decimal places, **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal places.
- Answer to each question will be evaluated <u>according to the following marking scheme</u> :

| | | |
|---|---|---|
| Full Marks | : **+3** | f **ONLY** the correct numerical value is entered in the designated place; |
| Zero Marks | : **0** | In all other cases. |

**PARAGRAPH I (Q.14 & 15)**

चित्रानुसार यंग के द्विझिर्री प्रयोग में, A एवं B झिर्रियां अपने स्थिर मध्यबिंदु के सापेक्ष दोलन कर रही हैं जबकि उनके बीच की दूरी का औसत मान 0.8 mm है। समय t पर, दोनों झिर्रियों के बीच की दूरी $d = (0.8 + 0.04 \sin \omega t)$ mm है, जहाँ $\omega = 0.08$ rad $s^{-1}$ है। परदे की झिर्रियों से दूरी 1 m है तथा झिर्रियों को प्रदीप्त करने वाले प्रकाश की तरंगदैर्ध्य 6000 Å है। परदे पर व्यतिकरण (interference) पैटर्न समय के साथ बदलता है, परन्तु बिंदु O पर स्थित केंद्रीय दीप्त फ्रिंज (zeroth fringe) स्थिर रहती है।



**Q.14** बिंदु O से ऊपर आठवीं ($8^{th}$) दीप्त फ्रिंज, दो चरम स्थितियों के बीच, समय के साथ दोलन करती है। इन दोनों चरम स्थितियों के बीच की दूरी माइक्रो मीटर (μm) में _____ होगी।

**Ans.** **[601.50]**

**Sol.** क्योंकि केंद्रीय चमकीली फ्रिंज की स्थिति परिवर्तित नहीं होती दोनों स्लिटँ π कलांतर के साथ दोलन कर रही है

$8^{th}$ वी चमकीली फ्रिंज के लिये

$$y = \frac{8\lambda D}{(0.8+0.04\sin\omega t)}\times 10^3$$

$$= \frac{8\times 6000\times 10^{-10}\times 10^3}{(0.8+0.04\sin\omega t)}$$

$$y = \frac{48\times 10^{-4}}{(0.8+0.04\sin\omega t)}$$

d, 0.84 mm से 0.76 mm तक परिवर्तित होता है

$\Delta y = 6.015 \times 10^{-4}$

$= 601.50\ \mu m$

**Q.15** आठवीं ($8^{th}$) दीप्त फ्रिंज के चलने की अधिकतम चाल _____ μm/s होगी।

**Ans.** **[24.00]**

**Sol.** चाल ज्ञात करने के लिये

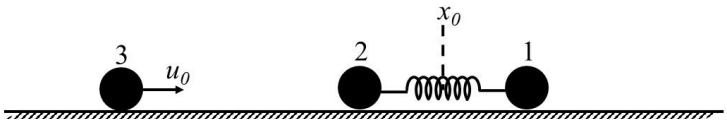
$$\frac{\delta y}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{8\lambda D}{d}\right) = -\frac{8\lambda D}{d^2}\frac{\delta d}{(\delta t)}$$

$$v = -\frac{8\lambda D}{d^2}\ (0.04\omega\cos\omega t)\times 10^{-3}$$

$$v_{max} = \frac{8\lambda D}{d^2}\times 4\omega\times 10^{-5} = \frac{8\times 6\times 10^{-7}\times 1\times 4\times 8\times 10^{-7}}{64\times 10^{-6}} = 24\times 10^{-6} = 24\ \mu m/s$$

**PARAGRAPH II (Q.16 & 17)**

एक द्रव्यमानरहित स्प्रिंग से जुड़े एक ही द्रव्यमान m के दो कण, 1 और 2, चित्रानुसार एक घर्षण रहित समतल पर हैं। प्रारंभ में, ये दोनों कण, जिनका द्रव्यमान केंद्र $x_0$ पर है, आयाम a तथा कोणीय आवृति ω से दोलन कर रहे हैं। अतः, समय पर उनकी स्थितियां, क्रमशः $x_1(t) = (x_0 + d) + a\sin\omega t$ और $x_2(t) = (x_0 - d) - a\sin\omega t$ हैं, जहां $d > 2a$ है। द्रव्यमान m का एक कण 3, चाल $u_0 = a\omega/2$ से इस निकाय की तरफ चलते हुए समय $t_0$ पर कण 2 से तात्क्षणिक प्रत्यास्थ संघट्ट (elastic collision) करता है। अंततः कणों 1 व 2 का द्रव्यमान-केंद्र चाल $v_{cm}$ से चलता है और ये कण आयाम b तथा उसी कोणीय आवृति ω से दोलन करते हैं।




**Q.16** यदि संघट्ट, समय $t_0 = 0$ पर होता है तो $v_{cm}/(a\omega)$ का मान _____ होगा।

**Ans.** **[00.75]**

**Sol.** $t = 0$, पर 2 माध्य स्थिति पर है

∴ टक्कर के पश्चात $u_2 = a\omega$ बाईं और होगी, वेग अर्न्तपरिवर्तित हो जायेगें

∴ $v_2 = \frac{a\omega}{2}$ दाईं और

$u_1 = a\omega$ दाईं और

$\therefore v_{cm} = \frac{3a\omega}{4}$

$\frac{v_{cm}}{a\omega} = \frac{3}{4} = 0.75$

**Q.17** यदि संघट्ट, समय $t_0 = \pi/(2\omega)$ पर होता है तो $4b^2/a^2$ का मान _____ होगा।

**Ans.** **[4.25]**

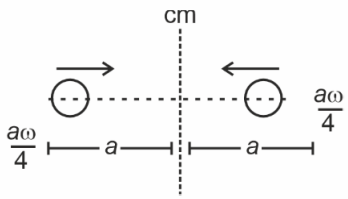
**Sol.** At $t = \frac{\pi}{2\omega}$, $u_2 = 0$

टक्कर के पश्चात्, $v_2 = \frac{a\omega}{2}$ दाईं और है

$u_1 = 0$

$\therefore v_{cm} = \frac{a\omega}{4}$ दाईं ओर है

w.r.t.




$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$\frac{a\omega}{4} = \omega\sqrt{A^2 - a^2}$

$\frac{a^2}{16} + a^2 = A^2$

$\frac{17}{16}a^2 = A^2 = b^2$

$\therefore b^2 = \frac{17}{16}a^2$

$\frac{4b^2}{a^2} = \frac{17}{4} = 4.25$

CAREER POINT

# JEE Advanced Exam 2024
# (Paper & Solution)

Date : 26 / 05 / 2024

## PAPER-2

## CHEMISTRY

### SECTION – 1 (Maximum Mark : 12)

- This section contains **FOUR (04)** questions.
- Each question has four options (A), (B), (C) and (D). **Only one** of these four option is the correct answer.
- For each question, choose the option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

| | | |
|---|---|---|
| Full Marks | : **+3** | If **ONLY** the correct option is chosen; |
| Zero Marks | : **0** | If none of the option is chosen (i.e. the question is unanswered); |
| Negative Marks | : –1 | In all other cases. |

**Q.1** बोर मॉडल के अनुसार, अधिकतम गतिज ऊर्जा वाला इलेक्ट्रॉन है:

(A) H परमाणु की प्रथम कक्षा में इलेक्ट्रॉन (B) $He^+$ की प्रथम कक्ष में इलेक्ट्रॉन

(C) $He^+$ की दूसरी कक्षा में इलेक्ट्रॉन (D) $Li^{2+}$ की दूसरी कक्षा में इलेक्ट्रॉन

**Ans.** **[B]**

**Sol.** $n^{th}$ बोहर कक्षक में इलेक्ट्रान की स्थितिज ऊर्जा,

$$K.E. = 13.6 \frac{Z^2}{n^2} eV/atom$$

$$n = 1 \text{ (H-परमाणु)} \rightarrow K.E. \propto \frac{1^2}{1^2} = 1$$

$$n = 1 \text{ } (He^+ \text{ आयन}) \rightarrow K.E. \propto \frac{2^2}{1^2} = 4$$

$$n = 2 \text{ } (He^+ \text{ आयन}) \rightarrow K.E. \propto \frac{2^2}{2^2} = 1$$

$$n = 2 \text{ } (Li^{2+} \text{ आयन}) \rightarrow K.E. \propto \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

उच्चतम के लिए $\rightarrow n = 1$ of $He^+$ आयन.

**Q.2** एक धातु न्यून (metal deficient) ऑक्साइड $\mathbf{M_XY_2O_4}$ (**M** तथा **Y** धातु हैं) के नमूने में, **M**, +2 और +3 ऑक्सीकरण अवस्थाओं में तथा **Y**, +3 ऑक्सीकरण अवस्था में उपस्थित है। यदि $\mathbf{M^{2+}}$ का **M** में अंश $\frac{1}{3}$ है, तो **X** का मान _____ है।

(A) 0.25 (B) 0.33 (C) 0.67 (D) 0.75

**Ans.** **[D]**

**Sol.** $M_XY_2O_4$

$M^{+2} = \frac{X}{3}, M^{+3} = \frac{2X}{3}$

सभी परमाणु की कुल ऑक्सीकरण संख्या

$$\frac{2X}{3} + 3\left(\frac{2X}{3}\right) + 2(+3) + 4(-2) = 0$$

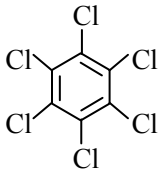
$$\frac{2X}{3} + 2X + 6 - 8 = 0$$

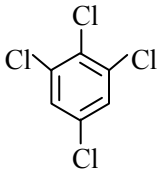
$$\frac{8X}{3} = 2$$

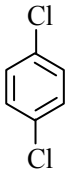
$$X = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75$$

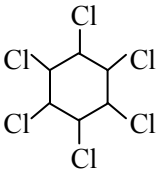
**Q.3** निम्नलिखित अभिक्रिया के अनुक्रम में, प्रमुख उत्पाद Q है

L-ग्लुकॉज $\xrightarrow[\text{ii) } Cr_2O_3,\ 775K,\ 10-20\,atm]{\text{i) HI, }\Delta}$ P $\xrightarrow[UV]{Cl_2\,(excess)}$ Q

(A) 

(B) 

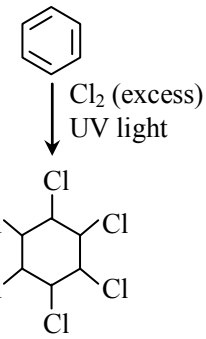
(C) 

(D) 

**Ans.** **[D]**

**Sol.**

$$\underset{C_8H_{12}O_6}{L-Glucose} \xrightarrow{(i)\ HI/\Delta} \underset{(n-Hexane)}{C_6H_{14}} \xrightarrow[775\ K,\ 10-20\ atm]{Cr_2O_3}$$




(BHC)

**Q.4** फॉस्फोरस पेंटाक्लोराइड का एक कार्बनिक ध्रुवीय विलायक में फ्लोरीनेशन करने पर बनने वाले स्पीशीज है:

(A) $[PF_4]^+[PF_6]^-$ and $[PCl_4]^+[PF_6]^-$ (B) $[PCl_4]^+[PCl_4F_2]^-$ and $[PCl_4]^+[PF_6]^-$

(C) $PF_3$ and $PCl_3$ (D) $PF_5$ and $PCl_3$

**Ans.** **[B]**

**Sol.** यदि $PCl_5$ ध्रुवीय विलायक में फ्लोरीनीकृत है तो आयनिक समायववी बनते है जैसे.:-

$[PCl_4]^+[PCl_4F_2]^-$ (रंगहीन क्रिस्टलन)

and $[PCl_4]^+[PF_6]^-$ (सफेद क्रिस्टल)

## SECTION – 2 (Maximum Mark : 12)

- This section contains **THREE (03)** questions
- Each question has **FOUR** options (A), (B), (C) and (D). **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

| | | |
|---|---|---|
| Full Marks | : **+4** | **ONLY** If (all) the correct option(s) is (are) chosen. |
| Partial Marks | : **+3** | If all the four options are correct but **ONLY** three options are chosen. |
| Partial Marks | : **+2** | If three or more options are correct but **ONLY** two options are chosen, both of which are correct. |
| Partial Marks | : **+1** | If two or more options are correct but **ONLY** one option is chosen and it is a correct option. |
| Zero Marks | : **0** | If unanswered; |
| Negative Marks | : **–2** | In all other cases. |

- For example, in a question, if (A), (B) and (D) are the ONLY three options corresponding to correct answers, then
  choosing ONLY (A), (B) and (D) will get +4 marks;
  choosing ONLY (A) and (B) will get +2 marks;
  choosing ONLY (A) and (D) will get +2marks;
  choosing ONLY (B) and (D) will get +2 marks;
  choosing ONLY (A) will get +1 mark;
  choosing ONLY (B) will get +1 mark;
  choosing ONLY (D) will get +1 mark;
  choosing no option(s) (i.e. the question is unanswered) will get 0 marks and
  choosing any other option(s) will get −2 marks.

---

**Q.5** हाइड्रैजिन ($N_2H_4$) के एक जलीय विलयन का $O_2$ द्वारा विद्युत रासायनिक ऑक्सीकरण करने पर रासायनिक ऊर्जा विद्युत ऊर्जा के रूप में निकलती है। इस विद्युत रासायनिक अभिक्रिया से उत्पन्न होने वाले उत्पादों में से एक उत्पाद $N_2(g)$ है। ऊपर दी गयी प्रक्रिया के लिए सही कथन/कथनों का चयन करें

(A) एनोड पर, $OH^-$ आयन $N_2H_4$ से अभिक्रिया करके $N_2(g)$ और जल बनाते है, जिससे 4 इलेक्ट्रॉन्स एनोड पर जाते हैं।

(B) कैथोड पर, $N_2H_4$ के टूटने से $N_2(g)$ बनती है और नवजात (nascent) हाइड्रोजन इलेक्ट्रोड पर निकलती हैं, जो कि ऑक्सीजन से अभिक्रिया करके जल बनाती है

(C) कैथोड पर, अणुक (molecular) ऑक्सीजन का परिवर्तन $OH^-$ में होता है

. (D) विद्युत रासायनिक अभिक्रिया (electrochemical process) के प्रमुख सहउत्पाद नाइट्रोजन के ऑक्साइड्स हैं।

**Ans.** **[A, C]**

**Sol.** $\overset{-2}{N_2}H_4 + \overset{0}{O_2} \rightarrow \overset{0}{N_2} + H_2O^{-2}$

Oxidation (Anode) Reduction (Cathode)

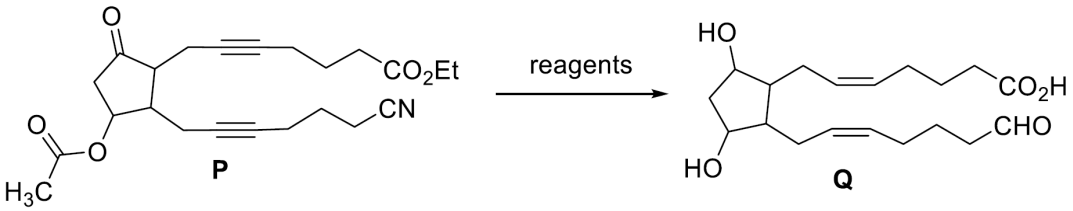
एनोड पर: $N_2H_4 + 4OH^- \longrightarrow N_2 + 4H_2O + 4e^-$

कैथोड पर: $O_2 + 2H_2O + 4e^- \longrightarrow 4OH^-$

पूर्ण अभिक्रिया: $N_2H_4 + O_2 \longrightarrow N_2 + 2H_2O$

कथन (A) और (C) सही है

**Q.6** P को Q में परिवर्तित करने के लिए अभिकारकों (reagents) के सही अनुक्रम वाला (वाले) विकल्प है (हैं)




(A) i) लिन्डलार अभिकर्मक, $H_2$; ii) $SnCl_2$/HCl; iii) $NaBH_4$; iv) $H_3O^+$

(B) i) लिन्डलार अभिकर्मक, $H_2$; ii) $H_3O^+$; iii) $SnCl_2$/HCl; iv) $NaBH_4$

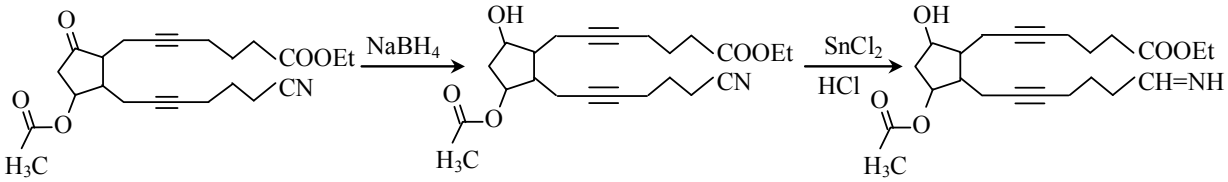
(C) i) $NaBH_4$; ii) $SnCl_2$/HCl; iii) $H_3O^+$; iv) लिन्डलार अभिकर्मक, $H_2$

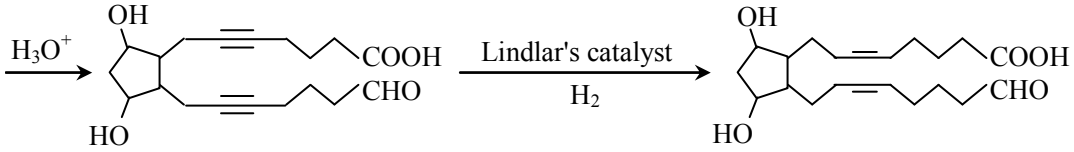
(D) i) लिन्डलार अभिकर्मक, $H_2$; ii) $NaBH_4$; iii) $SnCl_2$/HCl; iv) $H_3O^+$

**Ans.** **[C,D]**

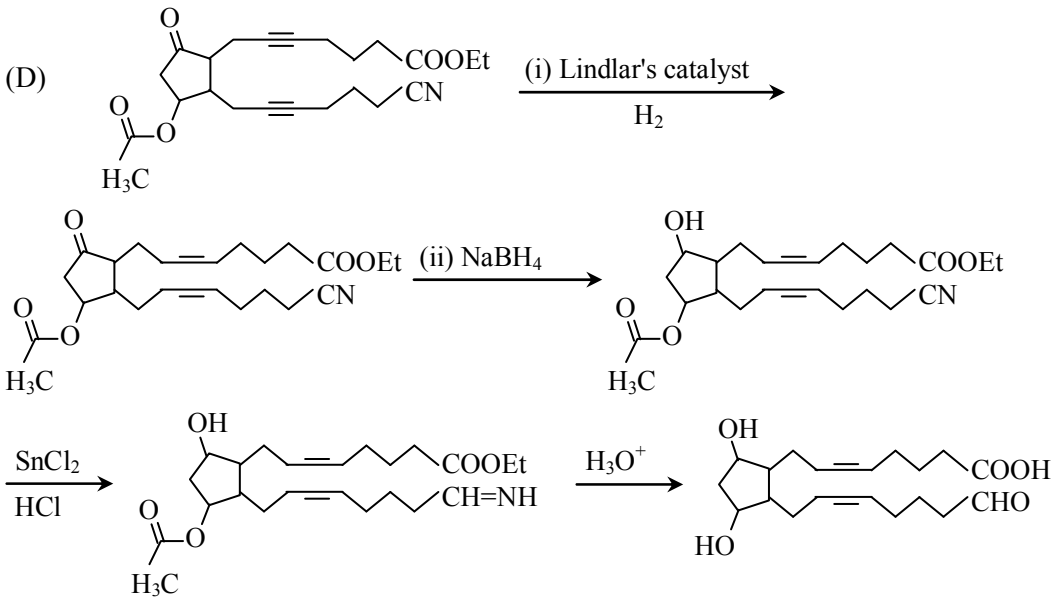
**Sol.**

**(C)**




(D)

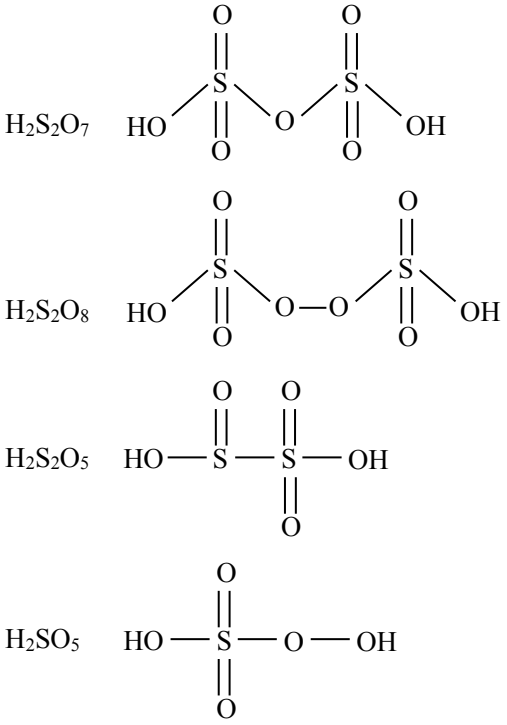



**Q.7** परऑक्साइड बंधता वाला (वाले) यौगिक है (हैं):

(A) $H_2S_2O_7$ (B) $H_2S_2O_8$ (C) $H_2S_2O_5$ (D) $H_2SO_5$

**Ans.** **[B, D]**

**Sol.**




## SECTION – 3 (Maximum Marks: 24)

- This section contains **SIX (06)** questions.
- The answer to each question is a **NON-NEGATIVE INTEGER.**
- Four each question, enter the correct integer corresponding to the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- Answer to each question will be evaluated <u>according to the following marking scheme</u> :

| | | |
|---|---|---|
| Full Marks | : **+4** | If **ONLY** the correct integer is entered; |
| Zero Marks | : **0** | In all other cases. |

**Q.8** 1g चारकोल पर एसिटिक एसिड की एक पूर्ण एकाणुक सतह के निर्माण के लिए 0.5 M एसिटिक एसिड के 100 mL का उपयोग किया गया। कुछ एसिटिक एसिड का अधिशोषण नहीं हुआ। अधिशोषित नहीं हुए एसिड को उदासीन करने के लिए 1 M NaOH के 40 mL विलयन की आवश्यकता पड़ती हैं। यदि एसिटिक एसिड का प्रत्येक अणु चारकोल की सतह का $P \times 10^{-23}$ $m^2$ क्षेत्रफल घेरता है तो P का मान _____ हैं।

[दिया गया है : चारकोल के सतह का क्षेत्रफल = $1.5 \times 10^2$ $m^2g^{-1}$; आवोगाद्रो संख्या ($N_A$) = $6.0 \times 10^{23}$ $mol^{-1}$]

**Ans.** **[2500]**

**Sol.** अधिशोषक $CH_3COOH$ के मोलो की संख्या = $\frac{40 \times 1}{1000} = 4 \times 10^{-2}$ मोल

अधिशोषक $CH_3COOH$ के मोलो की संख्या = $\frac{100 \times 0.5}{1000} - 4 \times 10^{-2}$

$= 10^{-2}$ मोल

एक अणु के द्वारा ढका हुआ सतही क्षेत्र

$CH_3COOH = \frac{1.5 \times 10^2}{10^{-2} \times 6 \times 10^{23}} = \frac{150 \times 10^2 \times 10^{-23}}{6}$

$= 2500 \times 10^{-23}$ $m^2$

$\therefore$ प्रश्न P के अनुसार = 2500

**Q.9** पात्र-1 में एक अवाष्पशील विलेय X के $w_2$ ग्राम को $w_1$ ग्राम जल में घोला जाता है। पात्र-2 में एक अन्य अवाष्पशील विलेय Y के $w_2$ ग्राम को $w_1$ ग्राम जल में घोला जाता है। दोनों पात्रों के तापमान और दाब समान है। X का मोलर मास Y के मोलर मास का 80% है। इनके अपने अपने सांद्रण में X का वान्ट हॉफ गुणक (van't Hoff factor) Y के वान्ट हॉफ गुणक का 1.2 गुना है।

पात्र-1 के विलयन का क्वथनांक का उन्नयन (elevation of boiling point) पात्र-2 के विलयन का क्वथनांक का उन्नयन का _____ % है।

**Ans.** **[150]**

**Sol.** **पात्र -I**

$$(\Delta T_B)_I = i_X \frac{w_2}{M_x}.\frac{1}{w_1} \times 1000 \times K_b$$

$M_x$ = 'X' का मोलर द्रव्यमान

**पात्र -II**

$$(\Delta T_B)_{II} = i_Y \frac{w_2}{M_y}.\frac{1}{w_1} \times 1000 \times K_B$$

$M_Y$ = 'Y' का मोलर द्रव्यमान

$$\frac{(\Delta T_b)_I}{(\Delta T_b)_{II}} \times 100 = \frac{i_x}{i_y}.\frac{M_y}{M_x} \times 100$$

$$= 1.2 \times \frac{100}{80} \times 100 = 150\ \%$$

**Q.10** एक द्विरज्जुकीय (double strand) संरचना के DNA की एक रज्जुक नीचे दी गई है:

5' A G T C A C G T A A G T C 3'

इस द्विरज्जुकीय संरचना के DNA को दो एक रज्जुकों में परिवर्तित करने के लिए कुल _____ kcal $mol^{-1}$ ऊर्जा की आवश्यकता है।

[दिया गया है: प्रति हाइड्रोजन बन्ध की औसत ऊर्जा A-T क्षारक युगल (base pair) के लिए 1.0 kcal $mol^{-1}$, G-C क्षारक युगल के लिए 1.5 kcal $mol^{-1}$, और A-U क्षारक युगल के लिए 1.25 kcal $mol^{-1}$ है। फॉस्फेट समूहों के बीच में स्थिर विद्युत प्रतिकर्षण को नकार लें।]

**Ans.** **[41]**

**Sol.**

A G T C A C G T A A G T C
|| ||| || ||| || ||| ||| || || || ||| || |||
T C A G T G C A T T C A G

(1) (i) (2) (ii) (3) (iii) (iv) (4) (5) (6) (v) (7) (vi)

कुल ऊर्जा= [BE H-बंध A – T × A की सँख्या = T युग्म × 2] + [BE H- बंध G – C × G की सँख्या ≡ C युग्म × 3]

= [1 × 7 × 2] + [1.5 × 6 × 3]

= 14 + 27

= 41 kcal

**Q.11** एक नमूने में प्रारम्भ में युरेनियम का केवल U-238 समस्थानिक है। समय के साथ कुछ U-238 के नाभिकीय क्षय के फलस्वरूप Pb-206 बनता है और Y-238 की कुछ मात्रा अविघटित रह जाती है।

नमूने की आयु P x $10^8$ वर्ष होने पर, उसमें Pb-206 और U-238 के भार का अनुपात 7 पाया गया।

P का मान _____ है।

[दिया है U-238 की अर्ध आयु 4.5 x $10^9$ वर्ष है $\log_e 2 = 0.693$]

**Ans.** **[143]**

**Sol.** नमूने की आयु $\rightarrow$ t वर्ष

$[A]_0 \propto$ U-238 के प्रारम्भिक मोल

$[A]_t \propto$ U-238 के अंतिम मोल

$$\frac{[A]_0}{[A]_t} = \frac{\frac{1}{238}+\frac{7}{206}}{\frac{1}{238}}$$

$$= \frac{0.0042+0.0340}{0.0042}$$

$$= 9.1$$

$$= \frac{2.303\log 2 \times t}{4.5\times10^9} = 2.303\log 9.1$$

$t = 14.27 \times 10^9$ वर्ष

$= 142.7 \times 10^9$ वर्ष

$P = 142.7$

$P \approx 143$

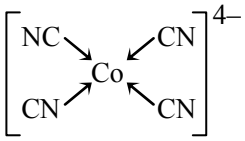
**Q.12** $[Co(CN)_4]^{4-}$, $[Co(CO)_3(NO)]$, $XeF_4$, $[PCl_4]^+$, $[PdCl_4]^{2-}$ , $[ICl_4]^-$ , $[Cu(CN)_4]^{3-}$ तथा $P_4$ में चतुष्फलकीय ज्यामिति वाले स्पीशीज की कुल संख्या _____ है।

**Ans.** **[5]**

**Sol.** $[Co(CN)_4]^{4-} \Rightarrow Co^0 \Rightarrow 3d^7 4s^2$

SFL के कारण, $CN^-$ का युग्मन और इलेक्ट्रॉन का स्थानान्तरण होता है और संकरण $dsp^2$ है

ज्यामिति $\Rightarrow$ चतुष्फलकीय

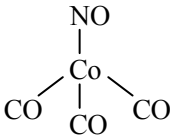



$[Co(CO)_3NO]$

$Co^{-1} \Rightarrow 3d^{10}$ SFL CO और NO के कारण

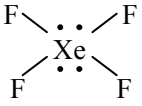
$sp^3$ संकरण

ज्यामिति = चतुष्फलकीय



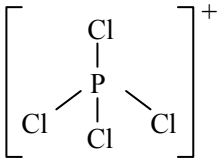

$XeF_4 \Rightarrow 4bp + 2lp \Rightarrow sp^3d^2$

वर्ग समतलीय



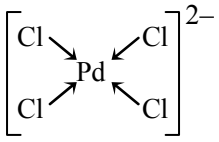

$PCl_4^+ \Rightarrow 4pb + 0lp$

$sp^3 \Rightarrow$ चतुष्फलकीय




$[PdCl_4]^{2-} \Rightarrow Pd^{2+}$, $Cl^-$ का SFL भाति व्यवहार

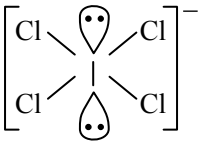
$Pd^{2+} \Rightarrow 4d^8 \Rightarrow dsp^2 \Rightarrow$ वर्ग समतलीय




$ICl_4^- \Rightarrow 4bp + 2lp$

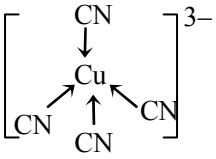
$sp^3d^2$

वर्ग समतलीय

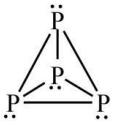


$[Cu(CN)_4]^{3-} \Rightarrow Cu^{+1} \Rightarrow 3d^{10}$
$\Rightarrow sp^3$

चतुष्फलकीय



$P_4$ चतुष्फलकीय है।

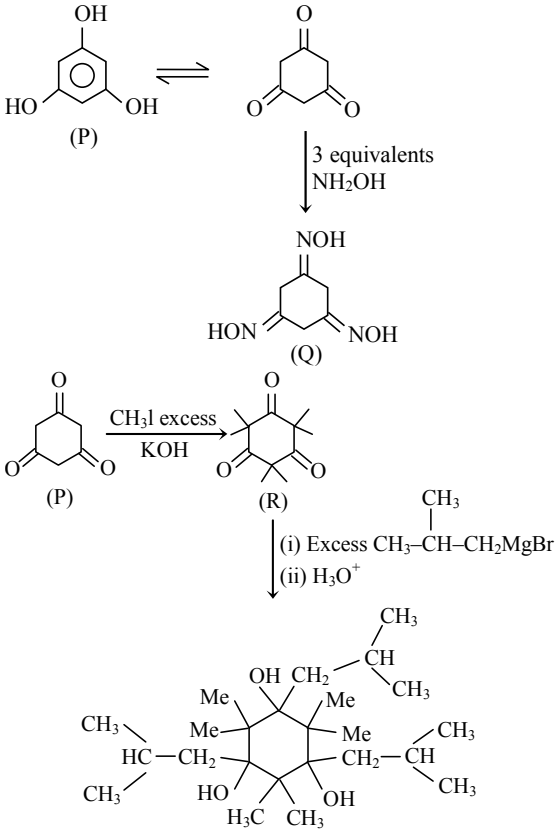


**Q.13** एक कार्बनिक यौगिक P, जिसका अणुसूत्र $C_6H_6O_3$ है, फेरिक क्लोराइड परीक्षण देता है और इसमें अंतःआण्विक हाइड्रोजन आबंध नहीं है। यौगिक P, $NH_2OH$ के 3 समतुल्यांक से अभिक्रिया करने पर ऑक्सिम Q बनाता है। KOH की उपस्थिति में, मेथिल आयोडाइड की अधिक मात्रा से P का विवेचन (treatment) करने पर मुख्य उत्पाद यौगिक R बनता है। यौगिक R की अभिक्रिया आइसो-ब्यूटाइलमैग्रीशियम ब्रोमाइड की अधिक मात्रा से करने के पश्चात् $H_3O^+$ से विवेचन कराने पर मुख्य उत्पाद यौगिक S बनता है।

यौगिक S में मेथिल ($-CH_3$) समूह(हों) की कुल संख्या _____ है।

**Ans.[12]**

**Sol.**




$CH_3$ वर्ग की संख्या = 12

## SECTION – 4 (Maximum Marks: 12)

- This section contains **TWO (02)** paragraphs.
- Based on each paragraph, there are **TWO (02)** questions.
- The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE.**
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- If the numerical value has more than two decimal places, **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal places.
- Answer to each question will be evaluated <u>according to the following marking scheme</u> :

| | | |
|---|---|---|
| Full Marks | : **+3** | **If ONLY** the correct numerical value is entered in the designated place; |
| Zero Marks | : **0** | In all other cases. |

**"PARAGRAPH I" (Q.14 & 15)**

एक कार्बनिक यौगिक P, जिसका अणुसूत्र $C_9H_{18}O_2$ है, ब्रोमीन वाटर को रंगविहीन करता है तथा आयोडोफॉर्म परीक्षण देता है। P का ओजोनीकरण के पश्चात $H_2O_2$ से विवेचन करने पर Q और R बनते है। Q आयोडोफॉर्म परीक्षण देता है लेकिन R आयोडोफॉर्म परीक्षण नहीं देता है। Q और R पिरीडीनियम क्लोरोक्रोमेट (PCC) के द्वारा आक्सीकरण करने के पश्चात् गर्म किये जाने पर क्रमशः S और T देते है। S और T दोनों ही आयोडोफॉर्म परीक्षण देते है।

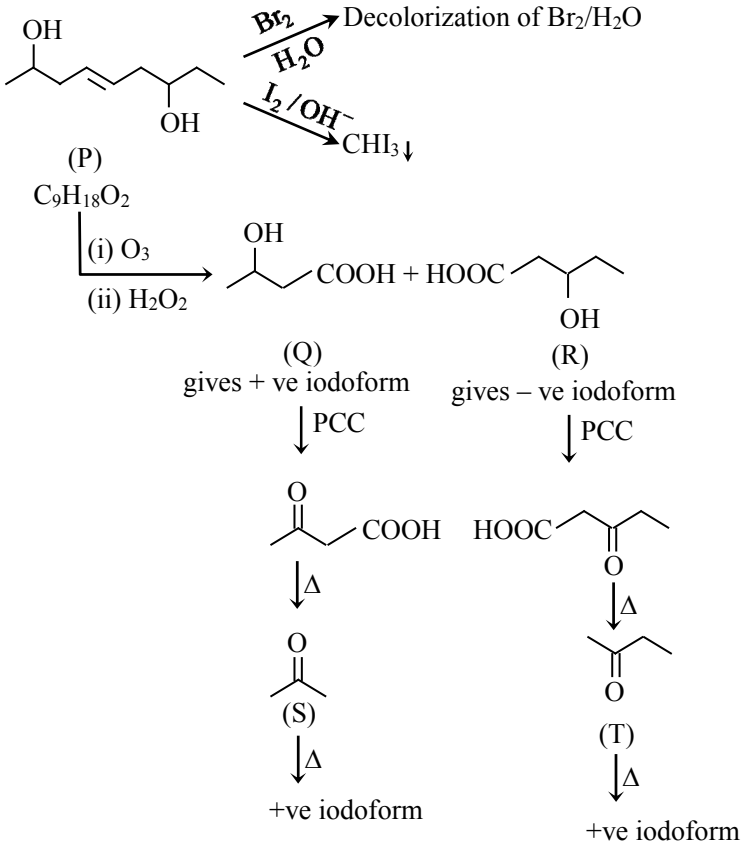
Q के 500 मोलों और R के 500 मोलों का पूर्ण सहबहुलकीकरण (copolymerization) होने पर एक अचक्रीय सहबहुलक (copolymer) U का एक मोल बनता है।

[दिया है, परमाणु भार : H =1, C = 12, O =16]

**Q.14** S और T में ऑक्सीजन परमाणुओं की संख्या का योग _____ है।

**Ans.** **[2]**

**Sol.**

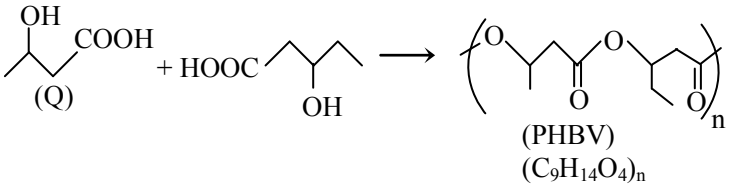



S और T मे O-परमाणु की संख्या का योग = 1 + 1 = 2

**Q.15** U का अणुभार _____ है।

**Ans.** **[93018]**

**Sol.**




(PHBV)

$(C_9H_{14}O_4)_n$

बहुलक का मोलर भार = (104 × 500) + (118 × 500) – 18 × 999

= 52000 + 59000 – 17982

= 93018 g

**"PARAGRAPH II" (Q.16 & 17)**

पोटैशियम फेरीसाइनाइड के जलीय विलयन में पोटैशियम आयोडाइड को मिलाने पर, एक उत्क्रमणीय अभिक्रिया (reversible reaction) होती है जिसमें एक संकुल P बनता है। प्रबल अम्लीय माध्यम में साम्यावस्था पूर्ण रूप से P की दिशा में विस्थापित हो जाती है। क्षीण अम्लीय माध्यम में संकुल P में जिंक क्लोराइड मिलाने पर एक अल्प विलेय संकुल Q प्राप्त होता है।

**Q.16** P के दो मोलों को बनाने के लिए आवश्यक आयोडाइड आयनों के मोलों की संख्या _____ है।

**Ans.** **[2]**

**Sol.** इस समीकरण से हमे KI के 2 मोल चाहिए

$2KI + 2K_3[Fe(CN)_6] \rightarrow I_2 + 2K_4[Fe(CN)_6]$

**Q.17** Q के अणुसूत्र में जिंक आयनों की संख्या _____ है।

**Ans.** **[2 or 3]**

**Sol.** $2K_4[Fe(CN)_6] + 3ZnCl_2 \rightarrow K_2Zn_3[Fe(CN)_6]_2 + 6KCl$

Or

$K_4[Fe(CN)_6] + 2ZnCl_2 \rightarrow Zn_2[Fe(CN)_6] + 4KCl$

CAREER POINT

# JEE Advanced Exam 2024
# (Paper & Solution)

Date : 26 / 05 / 2024

## PAPER-2

## MATHEMATICS

### SECTION – 1 (Maximum Mark : 12)

- इस खण्ड में **चार (04)** प्रश्न है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए **चार** विकल्प (A), (B), (C) और (D) दिए गए है। इन चार विकल्पों में से **केवल एक** विकल्प ही सही उत्तर है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए दिए हुए विकल्पों में से सही उत्तर से संबंधित विकल्प हो चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :

| | | |
|---|---|---|
| पूर्ण अंक | : **+3** | यदि सिर्फ **सही** विकल्प ही चुना गया है। |
| शून्य अंक | : **0** | यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित हैं) |
| ऋण अंक | : –1 | अन्य सभी परिस्थितियों में। |

**Q.1** प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के केवल मुख्य मानों को ध्यान में रखते हुए, $\tan\left(\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)-2\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)$ का मान है-

(A) $\frac{7}{24}$ (B) $\frac{-7}{24}$ (C) $\frac{-5}{24}$ (D) $\frac{5}{24}$

**Ans.** **[B]**

**Sol.** $\tan\left(\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)-2\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)$

Let $\sin^{-1}\frac{3}{5}=\alpha, \quad 2\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}=\beta \Rightarrow \cos\frac{\beta}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\because \sin\alpha=\frac{3}{5} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{3}{4} \quad \tan\beta=\frac{2\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$

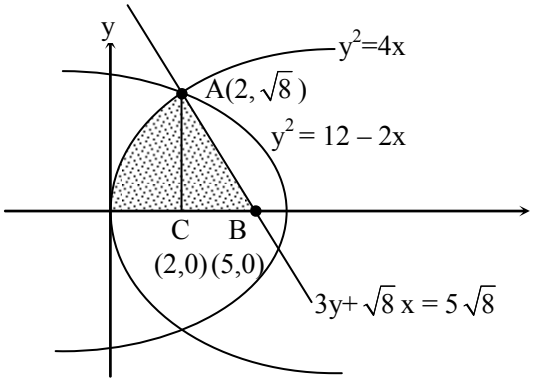
$\Rightarrow \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{4}{3}}{1+1}=-\frac{7}{24}$

**Q.2** माना कि $S = \{(x, y) \in R \times R : x \geq 0, y \geq 0, y^2 \leq 4x, y^2 \leq 12 - 2x$ और $3y + \sqrt{8}x \leq 5\sqrt{8}\}$ है। यदि क्षेत्र (region) S का क्षेत्रफल $\alpha\sqrt{2}$ है, तब $\alpha$ बराबर है -

(A) $\frac{17}{2}$ (B) $\frac{17}{3}$ (C) $\frac{17}{4}$ (D) $\frac{17}{5}$

**Ans.** **[B]**

**Sol.** $y^2 = 4x, y^2 = 12 - 2x \Rightarrow x = 2, y = \sqrt{8}$




$$A = \int_0^2 2\sqrt{x}dx + \frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{8}$$

$$= \left[2\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 + 3\sqrt{2} = \frac{4}{3}\times 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \frac{17}{3}\sqrt{2}$$

$\because A = \alpha\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \frac{17}{3}$

विकल्प (B) सही है

**Q.3** माना कि $k \in R$ है। यदि $\lim\limits_{x\to 0+} (\sin(\sin kx) + \cos x + x)^{2/x} = e^6$, तब k का मान है-

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

**Ans.** **[B]**

**Sol.** $\ell = \lim\limits_{x\to 0^+} (\sin(\sin kx) + \cos x + x)^{2/x} = e^6$

$$\Rightarrow \ln\ell = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x}(\sin(\sin kx) + \cos x + x - 1)$$

$$\Rightarrow \ln\ell = \lim_{x\to 0^+} 2\left(\frac{\sin(\sin kx)}{\sin kx}.\frac{\sin kx}{kx}.\frac{kx}{x} + 1 - \frac{(1-\cos x)}{x^2}.x\right)$$

$$\Rightarrow \ln\ell = 2(k + 1)$$

$$\Rightarrow \ell = e^{2(k+1)} = e^6$$

$$\Rightarrow k + 1 = 3$$

$$\Rightarrow k = 3 - 1 = 2$$

**Q.4** माना कि $f : R \to R$ एक फलन है, जो

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right), & \text{if } x \neq 0, \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। तब निम्नलिखित कथनों में से कौन सा **सत्य** है? ?

(A) अंतराल $\left[\frac{1}{10^{10}}, \infty\right)$ में $f(x) = 0$ के अनंत हल है।

(B) अंतराल $\left[\frac{1}{\pi}, \infty\right)$ में $f(x) = 0$ का कोई हल नहीं है।

(C) अंतराल $\left(0, \frac{1}{10^{10}}\right)$ में $f(x) = 0$ के हलों का समुच्चय परिमित है।

(D) अंतराल $\left(\frac{1}{\pi^2}, \frac{1}{\pi}\right)$ में $f(x) = 0$ के 25 से अधिक हल हैं।

**Ans.** **[D]**

**Sol.** $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right), & \text{if } x \neq 0, \\ 0, & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

$f(x) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{\pi}{x^2} = nx$

$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\sqrt{n}}}$

| If $x \in \left[\frac{1}{10^{10}}, \infty\right)$ | If $x \in \left[\frac{1}{\pi}, \infty\right)$ | If $x \in \left[0, \frac{1}{10^{10}}\right)$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{\sqrt{n}} \in \left[\frac{1}{10^{10}}, \infty\right)$ | $\frac{1}{\sqrt{n}} \in \left[\frac{1}{\pi}, \infty\right)$ | $\sqrt{n} \in (10^{10}, \infty)$ |
| $\sqrt{n} \in (0, 10^{10})$ | $\sqrt{n} \in (0, \pi)$ | n अनन्त |
| $n \in \left(0, (10^{10})^2\right]$ | $n \in \left(0, \pi^2\right]$ | If $x \in \left(\frac{1}{\pi^2}, \frac{1}{\pi}\right)$ |
| n के ज्ञातमान | n = 1, 2, 3, …..9 | $\sqrt{n} \in (\pi, \pi^2)$ |
| | | $n \in (\pi^2, \pi^4)$ |
| | | $n \in (9.8, 97.2 \ldots\ldots)$ |
| | | 25 से अधिकतम हल |

## SECTION – 2 (Maximum Mark : 12)

- इस खंड में **तीन (03)** प्रश्न है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए **चार विकल्प** (A), (B), (C) और (D) दिए गए है। इन चार विकल्पों में से **एक या एक से अधिक** विकल्प सही उत्तर है (हैं)
- प्रत्येक प्रश्न के लिए दिए हुए विकल्पों में से सही उत्तर (उत्तरों) से संबंधित विकल्प (विकल्पों) को चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजन के अनुसार होगा :

| | | |
|---|---|---|
| पूर्ण अंक | : **+4** | यदि **केवल** (सारे) सही विकल्प (विकल्पों) को चुना गया है। |
| आंशिक अंक | : **+3** | यदि चारों विकल्प सही हैं परन्तु **केवल तीन** विकल्पों को चुना गया है। |
| आंशिक अंक | : **+2** | यदि तीन या तीन से अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल दो विकल्पों को चुना गया हैं और दोनों चुने हुए विकल्प सही विकल्प है। |
| आंशिक अंक | : **+1** | यदि दो या दो से अधिक विकल्प सही है परन्तु केवल एक विकल्प को चुना गया है और चुना हुआ विकल्प एक सही विकल्प है। |
| शून्य अंक | : **0** | यदि किसी भी विकल्प को नही चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है) |
| ऋण अंक | : **–2** | अन्य सभी परिस्थितियों में |

**Q.5** माना कि S उन सभी $(\alpha, \beta) \in R \times R$ का समुच्चय है कि

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x^2)(\log_e x)^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^{\alpha\beta}(\log_e(1+x))^\beta} = 0,$$

है। तब निम्नलिखित में से कौन सा (से) सही है (हैं)?

(A) $(-1, 3) \in S$
(B) $(-1, 1) \in S$
(C) $(1, -1) \in S$
(D) $(1, -2) \in S$

**Ans.** **[B,C]**

**Sol.** $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x^2)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)(\ell n\, x)^\alpha}{x^{\alpha\beta}(\ell n(1+x))^\beta} = 0$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x^2)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{x^2}(\ell n x)^\alpha}{\left(\frac{1}{x^2}\right)x^{\alpha\beta}(\ell n(1+x))^\beta} = 0$$

यह संभव हैं यदि $\alpha\beta + 2 > 0$

$\alpha\beta > -2$

(A) $\alpha\beta = -3$
(B) $\alpha\beta = -1$
(C) $\alpha\beta = -1$
(D) $\alpha\beta = -2$

**Q.6** बिन्दु P(1, 3, 2,) से रेखा $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-6}{1}$ के समान्तर खींची गयी सरल रेखा, तल $L_1 : x - y + 3z = 6$ को बिन्दु Q पर प्रतिच्छेदित करती है। एक अन्य सरल रेखा जो बिन्दु $Q$ से होकर जाती है और तल $L_1$ के लंबवत है, तल $L_2 : 2x - y + z = -4$ को बिंदु R पर प्रतिच्छेदित करती है। तब निम्नलिखित कथनों` से कौन सा (से) **सत्य** है (हैं) ?

(A) रेखाखंड PQ की लंबाई $\sqrt{6}$ है
(B) R के निर्देशांक (1, 6, 3) हैं

(C) त्रिभुज PQR का केन्द्रक $\left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}, \frac{5}{3}\right)$ है

(D) त्रिभुज PQR का परिमाप $\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{11}$ है

**Ans.** **[A,C]**

**Sol.** P(1, 3, 2) से जाने वाली $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-6}{1}$ के समानान्तर रेखा का समीकरण $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1} = \lambda$ (माना)

अब, किसी बिन्दु $(\lambda + 1, 2\lambda + 3, \lambda + 2)$ को $L_1$ मे रखने पर

$\boxed{\lambda = 1}$

$\Rightarrow$ बिन्दु Q(2, 5, 3)

Q (2, 5, 3) से जाने वाली $L_1$ के लम्बवत रेखा का समीकरण

$\frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-3}{3} = \mu$ (माना)

किसी बिन्दु $(\mu + 2, -\mu + 5, 3\mu + 3)$ को $L_2$ में रखने पर

$\boxed{\mu = -1}$

$\Rightarrow$ बिन्दु R(1, 6, 0)

(A) $PQ = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

(B) R(1, 6, 0)

(C) केन्द्रक $\left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}, \frac{5}{3}\right)$

(D) $PQ + QR + PR = \sqrt{6} + \sqrt{11} + \sqrt{13}$

**Q.7** माना कि $A_1, B_1, C_1$, xy-तल में स्थित तीन बिंदु है। मान लीजिये कि रेखाएं $A_1C_1$ और $B_1C_1$ वक्र $y^2 = 8x$ के लिए क्रमशः $A_1$ और $B_1$ पर स्पर्श रेखाऐं है। यदि $O = (0,0)$ और $C_1 = (-4, 0)$, तब निम्नलिखित कथनों में से कौनसा (से) **सत्य** है (हैं)?

(A) रेखाखंड $OA_1$ की लंबाई $4\sqrt{3}$ है

(B) रेखाखंड $A_1B_1$ की लंबाई 16 है

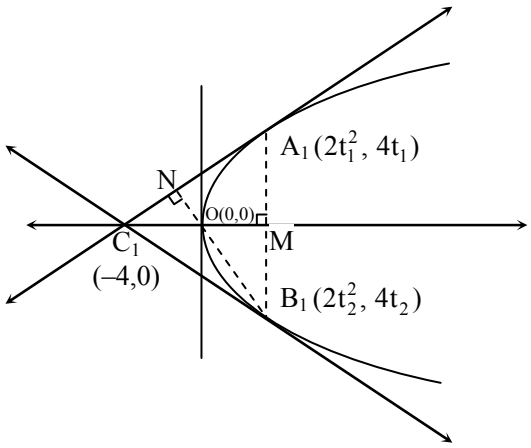
(C) त्रिभुज $A_1B_1C_1$ का लंबकेंद्र (0, 0) है

(D) त्रिभुज $A_1B_1C_1$ का लंबकेंद्र (1, 0) है

**Ans.** **[A,C]**

**Sol.** माना $A_1 = (2t_1^2, 4t_1)$ and $B_1 = (2t_2^2, 4t_2)$

$C \equiv (-4, 0) \equiv 2(t_1t_2, 2(t_1 + t_2))$




$\Rightarrow$ $t_2 \equiv -t_1$ और $t_1(-t_1) = -2$

$t_1 = \sqrt{2}$ , $t_2 = -\sqrt{2}$

$A_1 \equiv (4, 4\sqrt{2})$ , $B_1 \equiv (4, -4\sqrt{2})$

$\therefore$ $OA_1 = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{3} \equiv$

$A_1B_1 = 8\sqrt{2}$

शीर्षलम्ब $C_1M$ : $y = 0$ .....(i)

शीर्षलम्ब $B_1N$ : $\sqrt{2}\,x + y = 0$ .....(ii)

$\therefore$ लम्बकेन्द्र $\equiv (0, 0)$

## SECTION – 3 (Maximum Marks: 24)

- इस खंड में **छह (06)** प्रश्न है।
- प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक **गैर-ऋणात्मक पूर्णांक** है
- प्रत्येक प्रश्न के लिए उत्तर को दर्शाने वाले सही पूर्णांक को माउज और ऑन स्क्रीन वर्चुअल नुमेरिक कीपैड के प्रयोग से उत्तर के लिए चिन्हित स्थान पर प्रविष्ट करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :

| | | |
|---|---|---|
| पूर्ण अंक | : **+4** | यदि सिर्फ सही पूर्णांक (integer) ही प्रविष्ट किया गया है। |
| शून्य अंक | : **0** | अन्य सभी परिस्थितियों में। |

**Q.8** माना कि $f : R \to R$ एक ऐसा फलन है कि सभी $x, y \in R$ के लिए $f(x + y) = f(x) + f(y)$ है और $g : R \to (0, \infty)$ एक ऐसा फलन है कि सभी $x, y \in R$ के लिए $g(x + y) = g(x)\,g(y)$ है। यदि $f\left(\frac{-3}{5}\right) = 12$ और $g\left(\frac{-1}{3}\right) = 2$ है, तब $\left(f\left(\frac{1}{4}\right) + g(-2) - 8\right)g(0)$ का मान _____ है।

**Ans.** **[51]**

**Sol.** $f(x + y) = f(x) + f(y)$

$\Rightarrow$ $f(x) = kx$

$f\left(\frac{-3}{5}\right) = 12 \Rightarrow k = -20$

$\therefore$ $f(x) = -20\,x$

$g(x + y) = g(x)\,g(y) \Rightarrow g(x) = a^x$

$g\left(\frac{-1}{3}\right) = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$

$\therefore$ $g(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^x$

$\left(f\left(\frac{1}{4}\right) + g(-2) - 8\right)g(0) = (-5 + 64 - 8) \times 1 = 51$

**Q.9** एक थैले में N गेंदें है, जिनमें से 3 गेंदें सफेद है, 6 गेंदें हरी है, और शेष गेदें नीली है। मान लीजिये कि इसके अलावा, गेदें एकरूप हैं। थैले में से तीन गेदें यादृच्छया एक के बाद एक, बिना प्रतिस्थापन के निकाली जाती है। मान लीजिये कि $i = 1, 2, 3$ के लिए $W_i$, $G_i$, और $B_i$, i वें निकाल ($i^{th}$ draw) में क्रमशः सफेद, हरी और नीली गेंदों के आने की घटनाओं को दर्शाते हैं। यदि प्रायिकता $P(W_1 \cap G_2 \cap B_3) = \frac{2}{5N}$ है और सप्रतिबंध प्रायिकता $P(B_3 \mid W_1 \cap G_2) = \frac{2}{9}$ है, तब N बराबर _____ है।

**Ans.** **[11]**

**Sol.** N balls = 3W + 6G + (N – 9)B

$$P(W_1 \cap G_2 \cap B_3) = \frac{2}{5N}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{N} \times \frac{6}{N-1} \times \frac{N-9}{N-2} = \frac{2}{5N}$$

$$\Rightarrow N^2 - 48N + 407 = 0$$

$$\Rightarrow N = 11 \text{ or } 37$$

$$P(B_3 \mid W_1 \cap G_2) = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{P(W_1 \cap G_2 \cap B_3)}{P(W_1 \cap G_2)} = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2}{5N}}{\frac{3}{N} \times \frac{6}{N-1}} = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{N-1}{45} = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow N = 11$$

**Q.10** माना कि फलन $f : R \to R$,

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^{\pi x}} \frac{(x^{2023} + 2024x + 2025)}{(x^2 - x + 3)} + \frac{2}{e^{\pi x}} \frac{(x^{2023} + 2024x + 2025)}{(x^2 - x + 3)}$$

द्वारा परिभाषित है। तब R में, $f(x) = 0$ के हलों की संख्या _____ है।

**Ans.** **[01]**

**Sol.** $f(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{x^{2023} + 2024x + 2025}{(x^2 - x + 3)} \left[\frac{\sin x + 2}{e^{\pi x}}\right] = 0$$

$$\Rightarrow x^{2023} + 2024x + 2025 = 0$$

Let $g(x) = x^{2023} + 2024x + 2025$

$g'(x) = 2023x^{2022} + 2024 > 0 \ \forall \ x \in R$

$\therefore$ $f(x) = 0$ केवल एक हल है।

**Q.11** माना कि $\vec{p} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{q} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ हैं। यदि कुछ वास्तविक संख्याओं $\alpha$, $\beta$, और $\gamma$ के लिए,

$15\hat{i} + 10\hat{j} + 6\hat{k} = \alpha(2\vec{p} + \vec{q}) + \beta(\vec{p} - 2\vec{q}) + \gamma(\vec{p} \times \vec{q})$ है, तब $\gamma$ का मान _____ हैं।

**Ans.** **[2]**

**Sol.** $2\vec{p} + \vec{q} = 5\hat{i} + \hat{j} + 7\hat{k}$

$\vec{p} - 2\vec{q} = 0\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(4) - \hat{j}(-1) + \hat{k}(-3) = 4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$$

$15\hat{i} + 10\hat{j} + 6\hat{k} = \alpha(5\hat{i} + \hat{j} + 7\hat{k}) + \beta(3\hat{i} + \hat{k}) + \gamma(4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k})$

$\therefore \quad 15 = 5\alpha + 4\gamma$

$10 = \alpha + 3\beta + \gamma$

$6 = 7\alpha + \beta - 3\gamma$

$\therefore \quad \alpha = \frac{7}{5}, \beta = \frac{11}{5}, \gamma = 2$

$\therefore \quad \gamma = 2$

**Q.12** बिंदु $(0, -\alpha)$ से परवलय $x^2 = -4ay$, जहां $a > 0$ है, के लिए $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ढाल का एक अभिलंब खींचा गया है। माना कि L, परवलय की नियता के समान्तर $(0, -\alpha)$ से होकर जाने वाली रेखा है। मान लीजिये कि L, परवलय को दो बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेदित करती है। माना कि r, परवलय की नाभिलंब जीवा की लंबाई को दर्शाता है और s, रेखाखंड AB की लंबाई के वर्ग को दर्शाता है। यदि $r : s = 1 : 16$ है, तब $24a$ का मान _____ है।

**Ans.** **[12]**

**Sol.** $x^2 = -4ay$

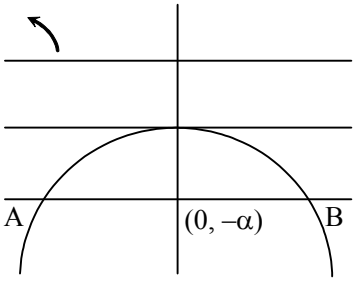
अभिलम्ब का समीकरण

$y = mx - 2a - \frac{a}{m^2}$

$-\alpha = -2a - \frac{a}{\frac{1}{6}} = -8a$

$\Rightarrow \quad \alpha = 8a$

नियता



आवश्यक रेखा का समीकरण

$y = -\alpha$

$\Rightarrow$ $y = -8a$, $x^2 = -4ay$ द्वारा हल करने पर

$\Rightarrow$ $x^2 = 32a^2$

$\Rightarrow$ $x = \pm 4\sqrt{2}a = \pm\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}$

$A\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}, -\alpha\right)$, $B\left(\dfrac{-\alpha}{\sqrt{2}}, -\alpha\right) \Rightarrow AB = \sqrt{2}\alpha$

$\Rightarrow$ $\dfrac{r}{s} = \dfrac{4a}{2\alpha^2} = \dfrac{1}{16}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{4a}{2\times 64a^2} = \dfrac{1}{16}$

$\Rightarrow$ $a = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{24a = 12}$

**Q.13** माना कि फलन $f : [1, \infty) \to R$,

$$f(t)=\begin{cases} (-1)^{n+1}2, & \text{if } t = 2n-1,\ n \in N, \\ \dfrac{(2n+1-t)}{2}f(2n-1)+\dfrac{(t-(2n-1))}{2}f(2n+1), & \text{if } 2n-1 < t < 2n+1, n \in N. \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। $g(x) = \int_1^x f(t)dt$, $x \in (1, \infty)$ से परिभाषित कीजिये। माना कि $\alpha$, अंतराल $(1, 8]$ में समीकरण $g(x) = 0$ के हलों की संख्या को दर्शाता है और $\beta = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{g(x)}{x-1}$ है। तब $\alpha + \beta$ का मान _____ है।

**Ans.** **[5]**

**Sol.** $f(t) = \left(\dfrac{(2n+1)-t}{2}\right)(-1)^{n+1}2 + \left(\dfrac{t-(2n-1)}{2}\right)(-1)^{n+2}2, t \in (2n-1, 2n+1)$

$\Rightarrow$ $f(t) = 2(-1)^{n+1}(2n-t)$, $t \in (2n-1, 2n+1)$

$\Rightarrow$ $g(x) = \int_1^x f(t)dt$, $x \in (1, 8]$

$$= \begin{cases} \int_1^x 2(2-t)dt, & 1 < x \le 3,\ n = 1 \\ \int_1^3 2(2-t)dt + \int_3^x (2t-8)dt, & 3 < x \le 5,\ n = 2 \\ \int_1^3 2(2-t)dt + \int_3^5 (2t-8)dt + \int_5^x 2(6-t)dt, & 5 < x \le 7,\ n = 3 \\ \int_1^3 2(2-t)dt + \int_3^5 (2t-8)dt + \int_5^7 2(6-t)dt + \int_7^x (2t-16)dt, & x \in (7, 8],\ n = 4 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x^2+4x-3, 1<x\le 3, \\ x^2-8x+15, 3<x\le 5 \\ -x^2+12x-35, 5<x\le 7 \\ x^2+16x+63, 71<x\le 8 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -(x-1)(x-3), 1<x\le 3 \\ (x-3)(x-5), 3<x\le 5 \\ -(x-5)(x-7), 5<x\le 7 \\ (x-7(x-9), 7<x\le 8 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $g(x) = 0 \Rightarrow x = 3, 5, 7 \Rightarrow \alpha = 3$

$$\beta = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{g(x)}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1^+} -\frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = 2$$

$\Rightarrow$ $\alpha + \beta = 5$

## SECTION – 4 (Maximum Marks: 12)

- इस खंड में **दो (02)** अनुच्छेद है।
- प्रत्येक अनुच्छेद पर आधारित **दो (02)** प्रश्न है।
- प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक संख्यात्मक मान **(NUMERICAL VALUE)** है।
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान हैं, तो मान के **दो (02)** दशमतल स्थानों तक समेंटे/शून्यांत **(truncate/round-off)** करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :

| | | |
|---|---|---|
| पूर्ण अंक | : **+3** | यदि निर्दिष्ट स्थान पर केवल सही संख्यात्मक मान प्रविष्ट किया गया है। |
| शून्य अंक | : **0** | अन्य सभी परिस्थितियों में। |

**अनुच्छेद "I" (Q.14 to Q.15)**

माना कि S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} है, और X, S से S में उन सभी संबंधों R का समुच्चय है जो निम्नलिखित दोनों गुणधर्मों को संतुष्ट करते है:

i. R में ठीक 6 अवयव हैं।

ii. प्रत्येक (a, b) $\in$ R के लिए $|a-b| \ge 2$ हैं।

माना कि Y = {R $\in$ X : R के परिसर में ठीक एक अवयव हैं और Z = {R $\in$ X : R, S से S में एक फलन है}

माना कि n(A), समुच्चय A में अवयवों की संख्या को दर्शाता है।

**Q.14** यदि $n(X) = {}^mC_6$ है, तब m का मान _____ है

**Ans.** **[20]**

**Sol.** S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} R : S $\to$ S

R मे अव्यवों की संख्या = 6

और प्रत्येक (a, b) के लिए $\in$ R ; | a – b | $\ge$ 2

$X \to$ सभी सम्बधों का समुच्चय $R : S \to S$

If $a = 1, b = 3, 4, 5, 6 \to ④$
$a = 2, b = 4, 5, 6 \to ③$
$a = 3, b = 1, 5, 6 \to ③$
$a = 4, b = 1, 2, 6 \to ③$
$a = 5, b = 1, 2, 3 \to ③$
$a = 6, b = 1, 2, 3, 4 \to ④$

क्रमित युग्मो (a, b) की कुल संख्या s.t. $|a - b| \geq 2$ $=20$

$\therefore$ $n(X) = X$ अव्यवों की संख्या

$= {}^{20}C_6 \quad \therefore m = 20$

**Q.15** यदि $n(Y) + n(Z)$ का मान $k^2$ है, तब $|k|$ _____ है

**Ans.** **[36]**

**Sol.** $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad R : S \to S$

R मे अवयवों की संख्या = 6

और प्रत्येक (a, b) के लिए $\in R ; |a - b| \geq 2$

$X \to$ सभी सम्बधों का समुच्चय $R : S \to S$

If

| | | | |
|---|---|---|---|
| a = 1 | b = 3, 4, 5, 6 | → | 4 |
| a = 2 | b = 4, 5, 6 | → | 3 |
| a = 3 | b = 1, 5, 6 | → | 3 |
| a = 4 | b = 1, 2, 6 | → | 3 |
| a = 5 | b = 1, 2, 3 | → | 3 |
| a = 6 | b = 1, 2, 3, 4 | → | 4 |

क्रमित युग्मो (a, b) की कुल संख्या s.t. $|a - b| \geq 2$ $= 20$

$\therefore$ $n(X) = X$ में अवयवों की संख्या

$= {}^{20}C_6 \quad \therefore m = 20$

$Y = \{R \in X : R$ के परिसर में ठीक एक अवयव है$\}$

उपरोक्त से, यदि R के परिसर में ठीक एक अवयव है तब R में उपस्थित अवयवों की अधिकतम संख्या 4 होगी

$\therefore$ $n(Y) = 0$

$Z = \{R \in X : R, S$ से S में एक फलन है$\}$

$n(Z) = {}^4C_1 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^4C_1 = (36)^2$

$n(y) + n(z) = 0 + (36)^2 = k^2$

$\Rightarrow \quad |k| = 36$

**अनुच्छेद "II"(Q.16 to Q.17)**

माना कि $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, 1]$ वह फलन है जो $f(x) = \sin^2 x$ द्वारा परिभाषित है, और माना कि $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, \infty)$ वह फलन है जो $g(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2} - x^2}$ द्वारा परिभाषित है।

**Q.16** $2\int_0^{\pi/2} f(x)g(x)dx - \int_0^{\pi/2} g(x)dx$ का मान _____ है

**Ans.** **[0]**

**Sol.** $f(x) = \sin^2 x, \; g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}x - x^2}$

यहां $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos^2 x, \; g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = g(x)$

माना $\ell_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x . g(x)dx$ .....(1)

as $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

$\Rightarrow \ell_1 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x g(x)dx$ .....(2)

(1) + (2)

$\Rightarrow 2\ell_1 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx$

$\Rightarrow \ell_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx \Rightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = 0$

**Q.17** $\frac{16}{\pi^3}\int_0^{\pi/2} f(x)g(x)dx$ का मान _____ है

**Ans.** **[0.25]**

**Sol.** Q.16 के अनुसार

$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = \ell_1$ (let)

अब, $\ell_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}x - x^2}dx$

$\ell_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)^2}dx$

$\frac{\pi}{4} - x = t$ रखने पर

$\Rightarrow dx = -dt$

$\ell_1 = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{-\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - t^2}dt$

$\ell_1 = \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - t^2}dt$

$\ell_1 = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - t^2}dt = 2\left[\frac{t}{2}\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - t^2} + \frac{\pi^2}{32}\sin^{-1}\left(\frac{4t}{\pi}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$\ell_1 = \frac{\pi^3}{32}$

अब, $\ell = \frac{8}{\pi^3}\ell_1$

$\ell = \frac{1}{4} = 0.25$