



# JEE Advanced Exam 2023 (Paper & Solution)

Date : 04 / 06 / 2023

## PAPER-2

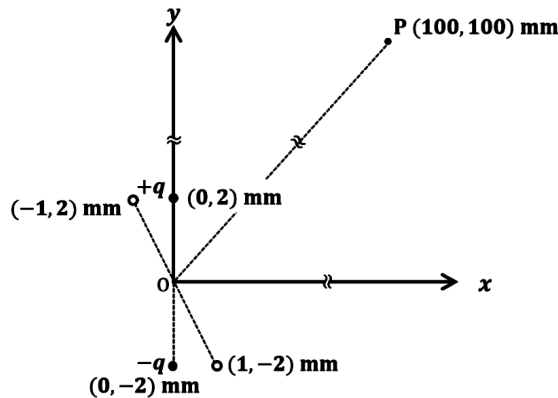
### PHYSICS

#### SECTION – 1 (Maximum Mark : 12)

- This section contains **FOUR (04)** questions.
- Each question has four options (A), (B), (C) and (D). **Only one** of these four option is the correct answer.
- For each question, choose the option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :
 

Full Marks	: +3	If <b>ONLY</b> the correct option is chosen;
Zero Marks	: 0	If none of the option is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks	: -1	In all other cases.

**Q.1** एक विद्युत द्विध्रुव दो आवेशों  $+q$  व  $-q$  से निर्मित है जो  $xy$ -तल में क्रमशः  $(0, 2)$  mm व  $(0, -2)$  mm पर स्थित है चित्र में दर्शाये अनुसार। विद्युत द्विध्रुव के कारण बिन्दु P  $(100, 100)$  mm पर विद्युत विभव  $V_0$  है। आवेश  $+q$  व  $-q$  को इसके पश्चात् क्रमशः बिन्दुओं  $(-1, 2)$  mm व  $(1, -2)$  mm तक गति कराई जाती है नये द्विध्रुव के कारण P पर विद्युत विभव का मान क्या है ?

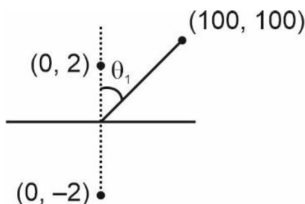

 (A)  $V_0/4$ 

 (B)  $V_0/2$ 

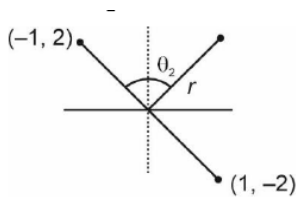
 (C)  $V_0/\sqrt{2}$ 

 (D)  $3V_0/4$ 
**Ans. [B]**

**Sol.**  $V_1 \propto \frac{p_1 \cos \theta_1}{r_1^3}$



$$V_2 \propto \frac{p_2 \cos \theta_2}{r_2^3}$$



$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_2 \cos \theta_2}{p_1 \cos \theta_1}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{q(-2\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot (\hat{i} + \hat{j})}{q(0\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot (\hat{i} + \hat{j})} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{V_0}{2}$$

**Q.2** यंग गुणांक  $Y$  को तीन व्युत्पन्न राशियों, गुरुत्वीय नियतांक  $G$ , प्लांक नियतांक  $h$  व प्रकाश की चाल  $c$  के पदों में  $Y = c^\alpha h^\beta G^\gamma$  द्वारा दर्शाया जाता है। निम्न में से कौनसा विकल्प सही है ?

- (A)  $\alpha = 7, \beta = -1, \gamma = -2$  (B)  $\alpha = -7, \beta = -1, \gamma = -2$   
 (C)  $\alpha = 7, \beta = -1, \gamma = 2$  (D)  $\alpha = -7, \beta = 1, \gamma = -2$

**Ans.** [A]

**Sol.**  $Y = c^\alpha h^\beta G^\gamma$   
 $[M^1 L^{-1} T^{-2}] = [M^0 L^1 T^{-1}]^\alpha [M^1 L^2 T^{-1}]^\beta [M^{-1} L^3 T^{-2}]^\gamma$   
 $1 = \beta - \gamma$   
 $-1 = \alpha + 2\beta + 3\gamma$   
 $-2 = -\alpha - \beta - 2\gamma$   
 हल करने पर  
 $\alpha = 7, \beta = -1, \gamma = -2$

**Q.3** एक कण का द्रव्यमान  $m$  है यह  $xy$ -तल में इस प्रकार गति कर रहा है कि एक बिन्दु  $(x, y)$  पर इसका वेग  $\vec{v} = \alpha(y\hat{x} + 2x\hat{y})$  द्वारा दिया जाता है जहाँ  $\alpha$  एक अशून्य नियतांक है कण पर कार्यरत बल  $\vec{F}$  क्या है ?

- (A)  $\vec{F} = 2m\alpha^2(x\hat{x} + y\hat{y})$  (B)  $\vec{F} = m\alpha^2(y\hat{x} + 2x\hat{y})$  (C)  $\vec{F} = 2m\alpha^2(y\hat{x} + x\hat{y})$  (D)  $\vec{F} = m\alpha^2(x\hat{x} + 2y\hat{y})$

**Ans.** [A]

**Sol.**  $F = m \frac{d\vec{v}}{dt}$   
 $\vec{v} = \alpha(y\hat{x} + 2x\hat{y})$   
 $\frac{d\vec{v}}{dt} = \alpha \left( \frac{dy}{dt} \hat{x} + 2 \frac{dx}{dt} \hat{y} \right)$   
 $= \alpha(v_y \hat{x} + 2v_x \hat{y})$   
 $= \alpha[2x\alpha \hat{x} + 2\alpha y \hat{y}]$   
 $= 2\alpha^2 [x\hat{x} + y\hat{y}]$   
 $\vec{F} = 2m\alpha^2 [x\hat{x} + y\hat{y}]$

**Q.4** एक आदर्श गैस एक उष्मागतिकीय साम्यावस्था में है गैस के अणुओं की स्वतन्त्रता की कोटियों की संख्या  $n$  है। गैस के एक मोल की आंतरिक ऊर्जा  $U_n$  है तथा गैस में ध्वनि की चाल  $v_n$  है एक फिक्स ताप व दाब पर निम्न में से कौनसा विकल्प सही है ?

- (A)  $v_3 < v_6$  व  $U_3 > U_6$  (B)  $v_5 > v_3$  व  $U_3 > U_5$  (C)  $v_5 > v_7$  व  $U_5 < U_7$  (D)  $v_6 < v_7$  व  $U_6 < U_7$

**Ans.** [C]

**Sol.** 
$$U_n = \frac{1 \times n \times RT}{2} = \frac{nRT}{2}$$

$$v_n = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\left(1 + \frac{2}{n}\right) \frac{RT}{M}}$$

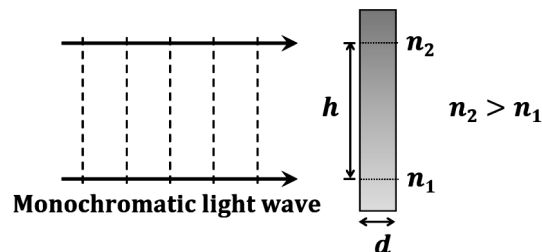
$\Rightarrow U_7 > U_5$  तथा  $U_7 > U_6$   
और  $v_5 > v_7$

### SECTION – 2 (Maximum Mark : 12)

- This section contains **THREE (03)** questions
- Each question has **FOUR** options (A), (B), (C) and (D). **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :
 

Full Marks	: +4	<b>ONLY</b> If (all) the correct option(s) is (are) chosen.
Partial Marks	: +3	If all the four options are correct but <b>ONLY</b> three options are chosen.
Partial Marks	: +2	If three or more options are correct but <b>ONLY</b> two options are chosen, both of which are correct.
Partial Marks	: +1	If two or more options are correct but <b>ONLY</b> one option is chosen and it is a correct option.
Zero Marks	: 0	If unanswered;
Negative Marks	: -2	In all other cases.
- For example, in a question, if (A), (B) and (D) are the **ONLY** three options corresponding to correct answers, than
  - choosing **ONLY** (A), (B) and (D) will get +4 marks;
  - choosing **ONLY** (A) and (B) will get +2 marks;
  - choosing **ONLY** (A) and (D) will get +2 marks;
  - choosing **ONLY** (B) and (D) will get +2 marks;
  - choosing **ONLY** (A) will get +1 mark;
  - choosing **ONLY** (B) will get +1 mark;
  - choosing **ONLY** (D) will get +1 mark;
  - choosing no option(s) (i.e. the question is unanswered) will get 0 marks and choosing any other option(s) will get -2 marks.

- Q.5** एक एकलवर्णी प्रकाश तरंग एक  $d$  मोटाई की कांच पट्टीका, पर अभिलम्बवत् रूप से आपतित होती है, दर्शाये अनुसार। पट्टीका का अपवर्तनांक ऊँचाई  $h$  के साथ  $n_1$  से  $n_2$  तक रेखीय रूप से बढ़ता जाता है। निम्न में से कौनसा/से कथन, पट्टीका से बाहर आने वाली प्रकाश तरंग के बारे में सही है ?



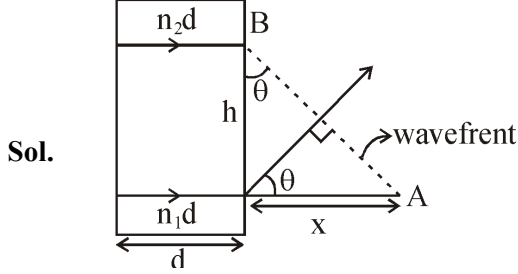
(A) यह  $\tan^{-1} \left[ \frac{(n_2^2 - n_1^2)d}{2h} \right]$  के एक कोण द्वारा विक्षेपित होगी

(B) यह  $\tan^{-1} \left[ \frac{(n_2 - n_1)d}{h} \right]$  के एक कोण द्वारा विक्षेपित होगी

(C) यह विक्षेपित नहीं होगी

(D) विक्षेपण कोण  $(n_2 - n_1)$  पर निर्भर करेगा  $n_1$  व  $n_2$  के अलग-अलग मानों पर यह निर्भर नहीं करेगा।

**Ans. [B,D]**



A व B पर कला समान होनी चाहिये इसलिये प्रकाशिक पथ की तुलना करने पर :

$$n_2 d = n_1 d + x$$

$$\Rightarrow x = (n_2 - n_1)d$$

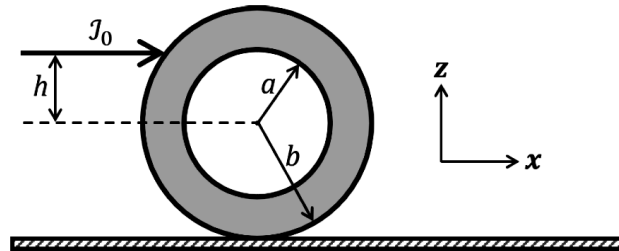
$$\tan \theta = \frac{x}{h} = \frac{(n_2 - n_1)d}{h} = \tan^{-1} \left\{ \frac{(n_2 - n_1)d}{h} \right\}$$

(B) सही है

$\theta$ ,  $(n_2 - n_1)$  पर निर्भर करता है।

(D) भी सही है।

**Q.6** एक वलयाकार चकती का द्रव्यमान  $M$  व इसकी आंतरिक त्रिज्या  $a$  तथा बाह्य त्रिज्या  $b$  है  $\mu$  घर्षण गुणांक वाली क्षैतिज सतह पर स्थित है दर्शाये अनुसार। किसी समय पर, एक आवेग  $J_0 \hat{x}$  चकती पर केन्द्र के  $h$  ऊँचाई ऊपर आरोपित किया जाता है। यदि  $h = h_m$  है तो चकती फिसले बिना  $x$ -अक्ष के अनुदिश लुढ़कती है। तो निम्न में से कौनसे कथन सही हैं ?



(A)  $\mu \neq 0$  तथा  $a \rightarrow 0$  के लिये,  $h_m = b/2$  है

(B)  $\mu \neq 0$  व  $a \rightarrow 2$  के लिये  $h_m = b$  है

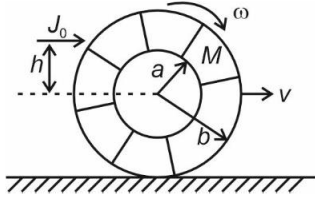
(C)  $h = h_m$ , के लिये आरम्भिक कोणिय वेग आंतरिक त्रिज्या  $a$  पर निर्भर नहीं करता है

(D)  $\mu = 0$  तथा  $h = 0$  के लिये पहिया फिसले बिना लुढ़कता है।

**Ans. [A,B,C,D]**

**Sol.**  $\vec{J} = \Delta \vec{p}$

$$\Rightarrow J_0 = MV \quad \dots(i)$$



$$\vec{A} \cdot \vec{j} = \Delta \vec{L}$$

$$\Rightarrow J_0 \times h = \frac{M}{2} (a^2 + b^2) \omega \quad \dots(i)$$

$$\text{If } h = h_m \Rightarrow \omega = \frac{v}{b}$$

$$\Rightarrow J_0 \times h_m = \left(\frac{m}{2}\right) (a^2 + b^2) \frac{v}{b} \quad \dots(ii)$$

समी. (i) ÷ समी. (ii)

$$\Rightarrow h_m = \frac{a^2 + b^2}{2b}$$

$$\text{यदि } a \rightarrow 0 \Rightarrow h_m = b/2$$

$$\text{यदि } a \rightarrow b \Rightarrow h_m = b$$

यदि  $h = h_m \Rightarrow \omega, a$  पर निर्भर नहीं करता (समी. i)

यदि  $r = 0, h = 0 \Rightarrow$  सदैव फिसलता है

**Q.7** एक विद्युत चुम्बकीय तरंग जो एक परावैद्युत माध्यम में संचरित हो रही है इसके साथ सम्बद्ध विद्युत क्षेत्र

$$\vec{E} = 30(2\hat{x} + \hat{y}) \sin \left[ 2\pi \left( 5 \times 10^{14} t - \frac{10^7}{3} z \right) \right] \text{ Vm}^{-1} \text{ द्वारा दिया जाता है। निम्न में से कौनसे विकल्प सही हैं ?}$$

[दिया गया है : निर्वात में प्रकाश की गति,  $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ]

$$(A) B_x = -2 \times 10^{-7} \sin \left[ 2\pi \left( 5 \times 10^{14} t - \frac{10^7}{3} z \right) \right] \text{ Wb m}^{-2}$$

$$(B) B_y = 2 \times 10^{-7} \sin \left[ 2\pi \left( 5 \times 10^{14} t - \frac{10^7}{3} z \right) \right] \text{ Wb m}^{-2}$$

(C) तरंग xy-तल में ध्रुवित है तथा x अक्ष के सापेक्ष ध्रुवण कोण  $30^\circ$  है

(D) माध्यम का अपवर्तनांक 2 है।

**Ans.** [A,D]

**Sol.** माध्यम में प्रकाश की चाल  $V = \omega/k$

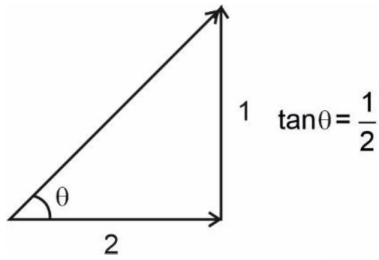
$$V = \frac{3 \times 5 \times 10^{14}}{10^7}$$

$$V = 1.5 \times 10^8$$

$$\text{अपवर्तनांक } \mu = \frac{C}{V} = \frac{3 \times 10^8}{1.5 \times 10^8} = 2$$

$$\mu = 2$$

$$\text{दिया है } \vec{E} = 30(2\hat{x} + \hat{y}) \sin \left[ 2\pi \left( 5 \times 10^{14} t - \frac{10^7}{3} z \right) \right]^{1/m}$$



$$B_0 = \frac{E_0}{V} = \frac{30\sqrt{5}}{1.5 \times 10^8}$$

$\vec{B}_0$  की दिशा  $(\vec{v} \times \vec{E})$  है

$$\vec{v} \times \vec{E} = \hat{k} \times \frac{(2\hat{i} + \hat{j})}{\sqrt{5}}$$

$$\left( \frac{-\hat{i} + 2\hat{j}}{\sqrt{5}} \right) \vec{B}_0 \text{ का मान रखने पर } = \frac{30\sqrt{5}}{1.5 \times 10^8} \times \left( \frac{-\hat{i} + 2\hat{j}}{\sqrt{5}} \right)$$

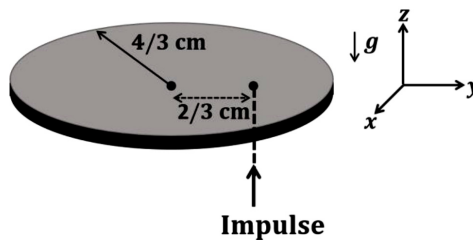
$$B_x = -2 \times 10^7$$

### SECTION – 3 (Maximum Marks: 24)

- This section contains **SIX (06)** questions.
- The answer to each question is a **NON-NEGATIVE INTERGER**.
- For each question, enter the correct integer corresponding to the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :
 

Full Marks	: +4	If <b>ONLY</b> the correct integer is entered;
Zero Marks	: 0	In all other cases.

- Q.8** एक पतले वृत्तीय सिक्के का द्रव्यमान 5 gm तथा त्रिज्या 4/3 cm है यह आरम्भिक रूप से xy-तल में है सिक्के को केन्द्र से 2/3 cm की एक दूरी पर  $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \times 10^{-2}$  N-s एक आवेग आरोपित कर ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर (+z दिशा में) टॉस किया गया है। सिक्का इसके व्यास के पारित: घूर्णन करता है व +z दिशा के अनुदिश गति करता है। उस समय तक जब यह वापस अपनी आरम्भिक स्थिति पर लौटता है यह n घूर्णन पूरे कर लेता है। n का मान \_\_\_\_\_ है।  
[दिया है : g गुरुत्वीय त्वरण = 10 m s<sup>-2</sup> है]



**Ans.** [30]

**Sol.** आवेग- संवेग प्रमेय द्वारा :

$$J = MV_{CM}$$

$$\Rightarrow V_{CM} = \frac{J}{M} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{100 \times \frac{5}{1000}} = \sqrt{2\pi} \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \text{यात्रा का कुल समय} = \frac{2}{g} \times \sqrt{2\pi}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\sqrt{2\pi}}{5} \text{ sec}$$

कोणीय आवेग व संवेग प्रमेय द्वारा :

$$J \times \frac{R}{2} = \left[ \frac{MR^2}{4} \right] \omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{J \times \frac{R}{2}}{\frac{MR^2}{4}} = \frac{J}{MR} \times 2 = \frac{\frac{\sqrt{\pi/2}}{100} \times 2}{\frac{5}{1000} \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{100}}$$

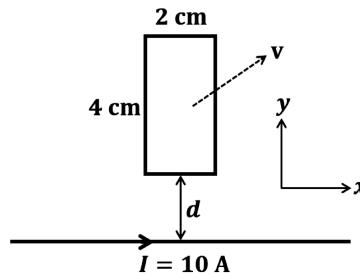
$$= 2 \times 75\sqrt{2\pi} \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow \text{घूर्णनों की संख्या} = \frac{\omega \cdot \Delta t}{2\pi} = \frac{2 \times 75\sqrt{2\pi} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{5}}{2\pi} = 30$$

$$\Rightarrow n = 30$$

**Q.9** एक आयताकार चालक लूप की लम्बाई 4 cm व चौड़ाई 2 cm है यह xy-तल में है, चित्र में दर्शाये अनुसार। इसे एक पतले व लम्बे चालक से तार से दूर की ओर एक नियत चाल  $v$  के साथ  $\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}$  दिशा के अनुदिश गति कराई जा रही है। तार एक नियत अवस्था धारा  $I = 10 \text{ A}$  धनात्मक x-दिशा में प्रवाहित रखता है।  $10\mu\text{A}$  की एक धारा लूप से होकर प्रवाहित होती है जब यह तार से  $d = 4 \text{ cm}$  की एक दूरी पर है यदि लूप का प्रतिरोध  $0.1 \Omega$  है तो  $v$  का मान \_\_\_\_\_  $\text{m s}^{-1}$  है।

[दिया है : पारगम्यता का मुक्त क्षेत्र  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$ ]

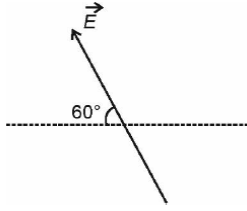


**Ans.** [4]

**Sol.** तार के लम्बवत् दो साइडों का वि.वा.बल में योगदान शून्य होगा।  
समांतर साइडों के लिये :

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v} = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} \times v$$

$$\Rightarrow \text{कुल वि.वा.बल} = (E_1 \cos 60^\circ - E_2 \cos 60^\circ) \times \text{चौड़ाई}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{100} \times \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \left[ \frac{1}{4/100} - \frac{1}{8/100} \right] \\
 &= \frac{1}{100} \times 10^{-7} \times 2 \times 10 \times v \times 100 \times \frac{1}{8} \\
 &= 2.5v \times 10^{-7} = i \times R \\
 \Rightarrow v &= \frac{10 \times 10^{-6} \times 0.1}{2.5 \times 10^{-7}} = 4 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

**Q.10** एक डोरी की लम्बाई 1 m व द्रव्यमान  $2 \times 10^{-5}$  kg है यह T तनाव के अधीन है जब डोरी कम्पित होती है दो क्रमिक सन्नादी 750 Hz व 1000 Hz आवृत्तियों पर घटित होते हैं तनाव T का मान \_\_\_\_\_ न्यूटन है।

**Ans.** [5]

**Sol.**  $l = 1\text{m}$ ,  $m = 2 \times 10^{-5}$  kg, T : डोरी में तनाव

∴ क्रमिक आवृत्तियां दी गई हैं

∴ यह दोनों सिरों से फिक्स होने की स्थिति है।

$$\text{अब, } f_{n+1} - f_n = 1000 - 750$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)}{2l} \sqrt{\frac{T}{\mu}} - \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 250$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 250$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{T}{2 \times 10^{-5}}} = 250 \times 2 \times 1$$

$$\Rightarrow \frac{T}{2 \times 10^{-5}} = 25 \times 10^4$$

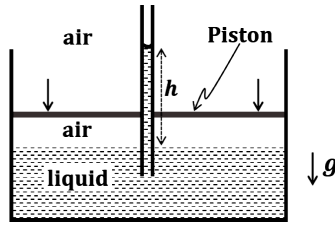
$$\Rightarrow T = 50 \times 10^{-1}$$

$$T = 5\text{N}$$

**Q.11** एक असंपीड्य द्रव एक पात्र में रखा है यह पात्र छिद्र के साथ एक भारहीन पिस्टन रखता है। एक केशिकानली की आंतरिक त्रिज्या 0.1 mm हैं इसे वायु रहित पिस्टन छिद्र से होते हुये, द्रव में उर्ध्व रूप में डुबोया जाता है, चित्र में दर्शाये अनुसार। पात्र में वायु को गति योग्य पिस्टन के साथ समतापीय रूप से आरम्भिक आयतन  $V_0$  से  $\frac{100}{101} V_0$  तक संपीडीत किया जाता है। वायु को एक आदर्श गैस के रूप में विचारित करते हुये, केशनली में द्रव स्तर से उपर, द्रव स्तम्भ की ऊँचाई (h) \_\_\_\_\_ cm है।

[दिया है : द्रव का पृष्ठ तनाव  $0.075 \text{ N m}^{-1}$ , वायु मण्डलीय दाब  $10^5 \text{ Nm}^{-2}$  गुरुत्वीय त्वरण (g)  $10 \text{ ms}^{-2}$ , द्रव का घनत्व  $10^3 \text{ kg m}^{-3}$  तथा केशनली सतह व दाब का सम्पर्क कोण शून्य है]





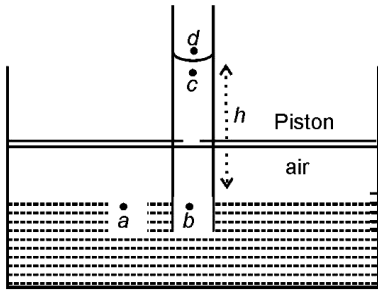
**Ans. [25]**

**Sol.** माना कि  $P_f$  वायुदाब है

$$P_0 v_0 = P_f v_f$$

$$P_0 v_0 = P_f \left( \frac{100}{101} \right) v_0$$

$$P_f = 101 \times 10^3 \text{ Pa} \quad (\because P_0 = 10^5 \text{ Nm}^{-2})$$



अब, चित्र में दर्शाये 4 बिन्दुओं को विचारित करें

$$P_d - P_c = \frac{2T}{R} \quad (\because P_d = P_0)$$

$$\therefore P_c = P_0 - \frac{2T}{R}$$

अब,

$$P_a = P_b \quad (\text{also, } P_a = P_f)$$

$$P_f = \rho gh + P_c$$

$$101 \times 10^3 = (10^3 \times 10 \times h) + \left( 10^5 - \frac{2 \times 0.075}{0.1 \times 10^{-3}} \right)$$

$$h = \frac{1}{4} \text{ m} = 25 \text{ cm}$$

- Q.12** एक रेडियो सक्रिय क्षय प्रक्रम में, सक्रियता को  $A = -\frac{dN}{dt}$  के रूप में परिभाषित किया जाता है यहाँ  $N(t)$ ,  $t$  समय पर रेडियो सक्रिय नाभिकों की संख्या है। रेडियो ऐक्टिव स्रोत  $S_1$  व  $S_2$ ,  $t = 0$  पर समान सक्रियता रखते हैं। बाद के किसी समय पर  $S_1$  व  $S_2$  की सक्रियताये क्रमशः  $A_1$  व  $A_2$  है जब  $S_1$  व  $S_2$  ठीक अपनी क्रमशः  $3^{\text{rd}}$  व  $7^{\text{th}}$  अर्द्ध आयु में पूर्ण करते हैं तो  $A_1/A_2$  का अनुपात \_\_\_\_\_ है।

**Ans. [16]**

**Sol.**  $A_1 = A_0 e^{-\lambda_1 t_1}$

also  $A_2 = A_0 e^{-\lambda_2 t_2}$

at  $t_1 = \frac{3 \ln 2}{\lambda_1}$ ,

$$A_1 = A_0 e^{-\lambda_1 \frac{3 \ln 2}{\lambda_1}} = A_0 e^{-3 \ln 2} \quad \dots (i)$$

समान रूप से  $t_2$  पर

$$t_2 = \frac{7 \ln 2}{\lambda_2},$$

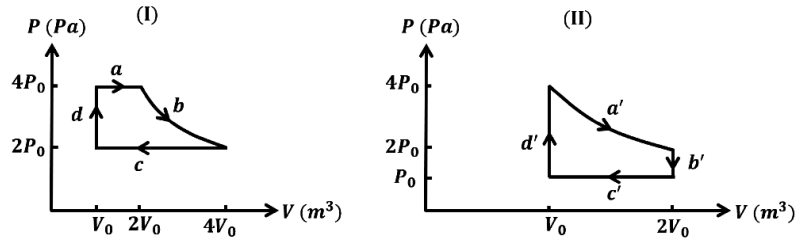
$$A_2 = A_0 e^{-\lambda_2 \frac{7 \ln 2}{\lambda_2}} = A_0 e^{-7 \ln 2} \quad \dots \text{(ii)}$$

(i) व (ii) से

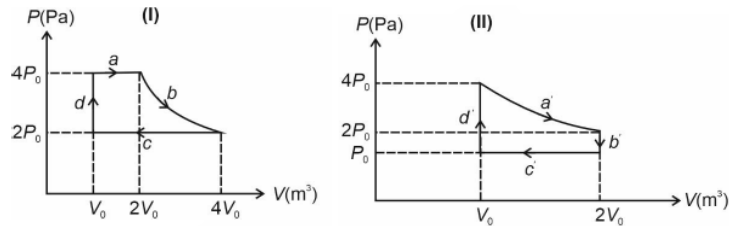
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 e^{-3 \ln 2}}{A_0 e^{-7 \ln 2}} = \frac{2^{-3}}{2^{-7}} = \frac{1}{2^{-4}} = 2^4 = 16$$

$$\therefore \frac{A_1}{A_2} = 16$$

**Q.13** एक आदर्श गैस का एक मोल दो भिन्न चक्रीय प्रक्रमों I व II नीचे दर्शाये P-V आरेखों के अनुसार, के अधीन है। चक्र I में प्रक्रम a, b, c व d क्रमशः समदाबीय, समतापीय व समदाबीय व समआयतनिक है चक्र II में, प्रक्रम a', b', c' व d' क्रमशः समतापीय, समआयतनिक समदाबीय व समआयतनिक है चक्र I के दौरान किया गया कुल कार्य  $W_I$  व चक्र II के दौरान किया गया कुल कार्य  $W_{II}$  है तो  $W_I/W_{II}$  अनुपात है \_\_\_\_\_.



**Ans. [2]**  
**Sol.**



$$W_I = W_a + W_b + W_c + W_d$$

$$= 4P_0(2V_0 - V_0) + nRT \ln \left( \frac{4V_0}{2V_0} \right) + 2P_0(V_0 - 4V_0) + 0$$

$$= 4P_0V_0 + nR \left( \frac{8P_0V_0}{nR} \right) \ln 2 - 6P_0V_0$$

$$= 8P_0V_0 \ln 2 - 2P_0V_0$$

$$W_{II} = W_{a'} + W_{b'} + W_{c'} + W_{d'}$$

$$= nRT \ln \left( \frac{2V_0}{V_0} \right) + 0 + P_0(V_0 - 2V_0) + 0$$

$$= nR \left( \frac{4P_0V_0}{nR} \right) \ln 2 - P_0V_0$$

$$= 4P_0V_0 \ln 2 - P_0V_0$$

$$\frac{W_I}{W_{II}} = \frac{8P_0V_0 \ln 2 - 2P_0V_0}{4P_0V_0 \ln 2 - P_0V_0} = 2$$

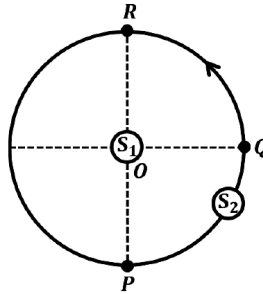
**SECTION – 4 (Maximum Marks: 12)**

- This section contains **TWO (02)** paragraphs.
- Based on each paragraph, there are **TWO (02)** questions.
- The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- If the numerical value has more than two decimal places, **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal places.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :
 

Full Marks	: +3	f <b>ONLY</b> the correct numerical value is entered in the designated place;
Zero Marks	: 0	In all other cases.

**PARAGRAPH I (Q.14 & 15)**

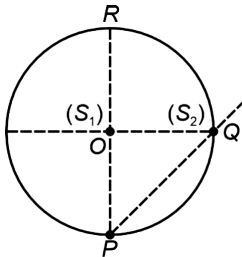
$S_1$  व  $S_2$  दो एक समान ध्वनि स्रोत 656 Hz आवृत्ति के हैं स्रोत  $S_1$ , O पर स्थित है व  $S_2$ , O के परितः वृत्तीय पथ पर  $4\sqrt{2}$  m  $s^{-1}$  की एक समान चाल के साथ वामावर्त रूप से गतिशील हैं, चित्र में दर्शाये अनुसार। पथ पर तीन बिन्दु P, Q व R इस प्रकार हैं कि P तथा R व्यासिय रूप से विपरीत हैं जबकि Q, इनसे समदूरस्थ है। एक ध्वनि संसूचक P पर है, स्रोत  $S_1$ , OP दिशा के अनुदिश गति कर सकता है। [दिया है : वायु में ध्वनि की चाल  $324$  m  $s^{-1}$  है।]



**Q.14** जब केवल  $S_2$  ध्वनि उत्सर्जित कर रहा है तब Q पर संसूचक द्वारा मापी गई ध्वनि आवृत्ति Hz में \_\_\_\_\_ है।

**Ans.** [648]

**Sol.**



$$f_0 = 656 \text{ Hz}$$

$$\text{ध्वनि का वेग} = 324 \text{ m/s.}$$

स्रोत का वेग, श्रोता से दूर की ओर है

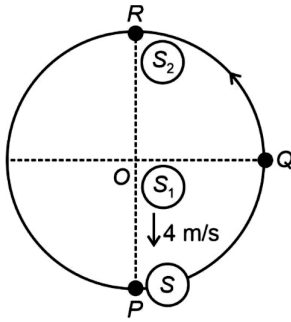
$$V_s = 4\sqrt{2} \cos 45^\circ = 4 \text{ m/s}$$

$$\therefore f = \left( \frac{v}{v + v_s} \right) f_0 = \left( \frac{324}{324 + 4} \right) 656$$

$$f = 648 \text{ Hz.}$$

**Q.15** विचारित करें कि दोनों स्रोत ध्वनि उत्सर्जित कर रहे हैं। जब  $S_2$ , R पर है व  $S_1$ ,  $4 \text{ m s}^{-1}$  की एक चाल के साथ संसूचक की ओर आ रहा है तब संसूचक द्वारा मापी गई विस्पंद आवृत्ति \_\_\_\_\_ Hz है।

**Ans.** [8.20]

**Sol.**


$$f_0 = 656 \text{ Hz}$$

$$v = 324 \text{ m/s}$$

$S_1$  की गति के कारण सुनी गई आवृत्ति

$$f_1 = \left( \frac{v}{v - u_s} \right) f_0$$

$$f_1 = \frac{324}{320} \times 656$$

$S_2$  की गति के कारण सुनी गई आवृत्ति

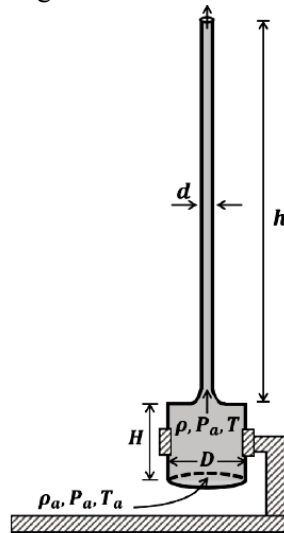
$$f_2 = 656 \text{ Hz}$$

$$\therefore \text{विस्पंद आवृत्ति } \Delta f = f_1 - f_2 = 656 \left( \frac{324}{320} - 1 \right)$$

$$\Delta f = 8.2$$

**PARAGRAPH II (Q.16 & 17)**

एक बेलनाकार भट्टी (furnace), (H) ऊँचाई व व्यास (D) दोनों 1m रखती है। यह 360 K ताप पर व्यवस्थित है। भट्टी के अंदर, वायु नियत दाब  $P_a$  व पर गर्म की जाती है तथा इसका ताप  $T = 360 \text{ K}$  हो जाता है। गर्म वायु  $\rho$  घनत्व के साथ, एक उर्ध्व चिमनी व्यास  $d = 0.1 \text{ m}$  व ऊँचाई  $h = 9 \text{ m}$  (भट्टी के ऊपर) से होकर उपर उठती है व चिमनी से बाहर निकल जाती है। (देखें चित्र) परिणाम स्वरूप, वायुमण्डलीय वायु घनत्व  $\rho_a = 1.2 \text{ Kg m}^{-3}$  दाब,  $P_a$  व ताप  $T_a = 300 \text{ K}$  भट्टी के अंदर प्रविष्ट होती है। मानाकि वायु एक आदर्श गैस है चिमनी व भट्टी के अंदर  $\rho$  व  $T$  के परिवर्तन के नगण्य मानें। श्यान प्रभावों को भी नगण्य मानें। [दिया है: गुरुत्वीय त्वरण  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$  तथा  $\pi = 3.14$ ]



**Q.16** वायु प्रवाह को धारा रेखीय मानते हुये, चिमनी से बाहर निर्गत होने वाली नियत द्रव्यमान प्रवाह दर  $\text{gm s}^{-1}$  है।

**Ans.** [47.10]

**Sol.**  $\therefore PM = \rho RT$

भट्टी के अन्दर P नियत है

$$\therefore \rho RT = \text{नियत}$$

या  $\rho T = \text{नियत}$

$$\therefore \rho_a T_a = \rho T$$

$$1.2(300) = \rho(360)$$

$$\rho = 1 \text{ kg/m}^3$$

अब, चिमनी के निचले व उपरी सिरे पर बरनोली प्रमेय लागू करने पर

$$P_a + \frac{1}{2} \rho(0)^2 + 0 = (P_a - \rho_a gh) + \frac{1}{2} \rho(v^2) + \rho gh$$

$$v = \sqrt{\frac{2(\rho_a - \rho)gh}{\rho}}$$

$$\Rightarrow v = 6 \text{ m/s}$$

$$\therefore \text{निकास पर } \frac{dm}{dt} = \rho v \left( \frac{\pi d^2}{4} \right)$$

$$= \frac{1 \times 6 \times 3.14 \times (0.1)^2}{4}$$

$$= 0.0471 \text{ kg/s}$$

$$= 47.10 \text{ g/s}$$

**Q.17** जब चिमनी को इसके शीर्ष दर एक केप (cap) का उपयोग कर बंद कर दिया जाता है तब केप के उपर व नीचे की सतहों में मध्य दाबांतर  $\Delta P$  विकसित हो जाता है यदि वायु प्रवाह के रूकने के कारण गर्म वायु के ताप व घनत्व में होने वाले परिवर्तन को नगण्य माना जाये तो  $\Delta P$  का मान \_\_\_\_\_  $\text{Nm}^{-2}$  है।

**Ans.** [18.00]

**Sol.**

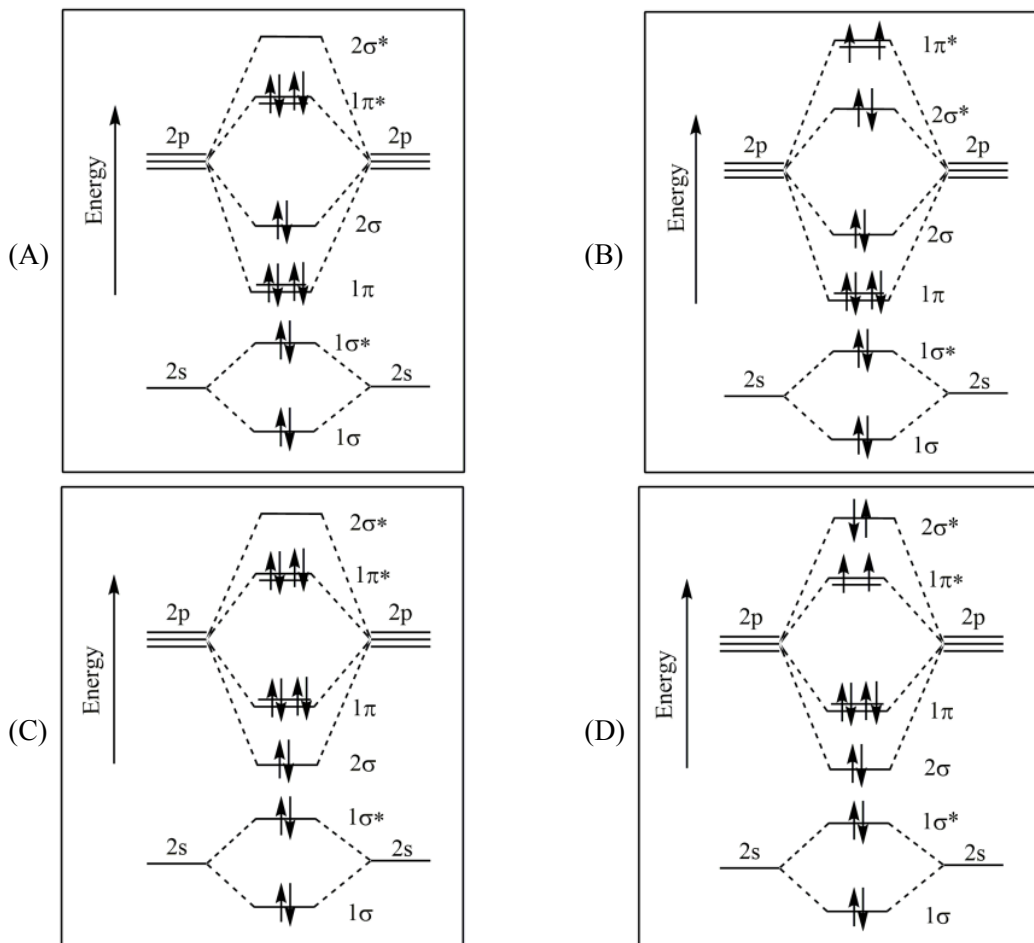
# CHEMISTRY

## SECTION – 1 (Maximum Mark : 12)

- This section contains **FOUR (04)** questions.
- Each question has four options (A), (B), (C) and (D). **Only one** of these four option is the correct answer.
- For each question, choose the option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :
 

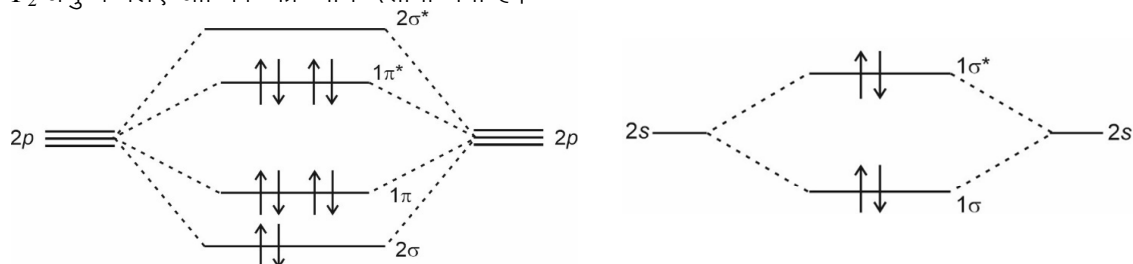
Full Marks	: +3	If <b>ONLY</b> the correct option is chosen;
Zero Marks	: 0	If none of the option is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks	: -1	In all other cases.

**Q.1** मूल अवस्था में  $F_2$  अणु के लिए आण्विक वक्र सही है।



**Ans.** [C]

**Sol.**  $F_2$  अणु के लिए आण्विक वक्र नीचे दर्शाया गया है।



अतः विकल्प (C) सही है .

- Q.2** कोलाइड से संबंधित निम्नलिखित कथनों पर विचार करें
- (I) द्रव विरोधी कोलाइड परिक्षिप्त प्रावस्था और परिक्षेपण माध्यम के सरल मिश्रण से नहीं बनते हैं।  
 (II) पायस के लिए परिक्षिप्त प्रावस्था और परिक्षेपण माध्यम दोनों द्रव होते हैं।  
 (III) किसी भी ताप पर किसी भी विलायक में एक पृष्ठ सक्रिय कारक को घोलकर मिसेल का उत्पादन किया जाता है  
 (IV) टिण्डल प्रभाव को कोलाइडी विलयन से देखा जा सकता है जिसमें परिक्षिप्त प्रावस्था परिक्षिप्त माध्यम के समान अपवर्तक परिमाण (सूचकांक) होता है।

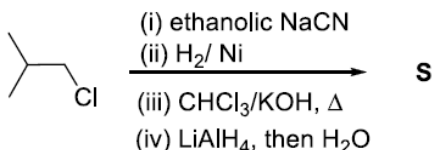
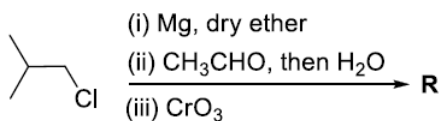
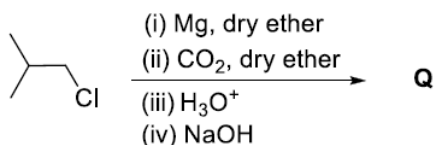
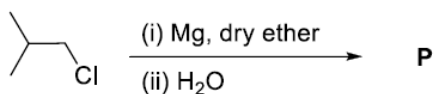
कथनों के सही युग्म वाला विकल्प है।

- (A) (I) तथा (II)                      (B) (II) तथा (III)                      (C) (III) तथा (IV)                      (D) (II) तथा (IV)

**Ans. [A]**

**Sol.** द्रव विरोधी कोलाइड परिक्षिप्त प्रावस्था और परिक्षेपण माध्यम के सरल मिश्रण से नहीं बनते हैं। इनके कोलाइडी सॉल विशेष विधियों द्वारा ही बनाये जा सकते हैं। इमल्शन के कोलाइड परिक्षिप्त प्रावस्था और परिक्षेपण माध्यम में द्रव होते हैं। मिसेल एक निश्चित ताप से अधिक ताप पर बनते हैं। जिसे क्राफ्ट ताप कहते हैं। एवं सान्द्रता एक निश्चित सान्द्रता से अधिक होती है। जिसे क्रान्तिक मिसेल सान्द्रता के रूप में जाना जाता है। टिण्डल प्रभाव का अवलोकन तभी किया जा सकता है। जब परिक्षिप्त प्रावस्था व परिक्षेपण माध्यम के अपवर्तनांक परिमाण में बहुत अंतर होता है।

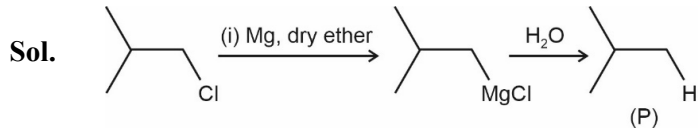
- Q.3** दि गयी अभिक्रिया में P, Q, R, तथा S मुख्य उत्पाद है।

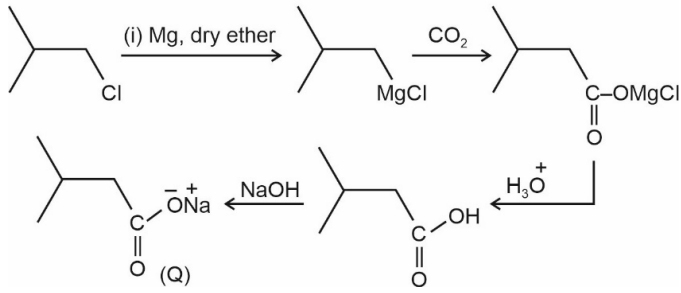


P, Q, R, तथा S के बारे में सही कथन है।

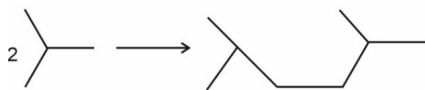
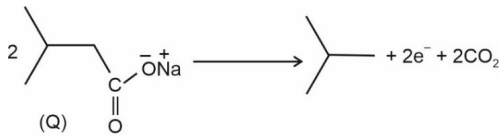
- (A) P चार कार्बन वाला एक प्राथमिक एल्कोहॉल है  
 (B) Q आठ कार्बन उत्पाद देने के लिए कोल्बे के विद्युत अपघटय से गुजरता है  
 (C) R में छः कार्बन है और यह केनिजारो अभिक्रिया से गुजरता है  
 (D) S छः कार्बन वाला एक प्राथमिक एमीन है

**Ans. [B]**

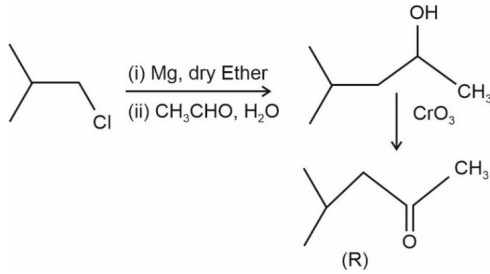




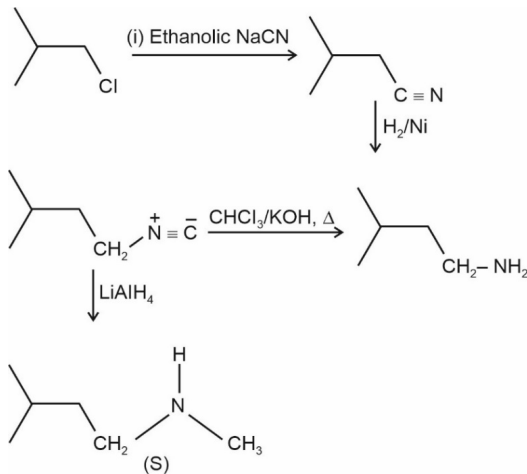
कोल्बे अपघटन:



8 कार्बन युक्त उत्पाद



यह एल्डॉल से अभिक्रिया करता है। न कि कैनिजारो से।



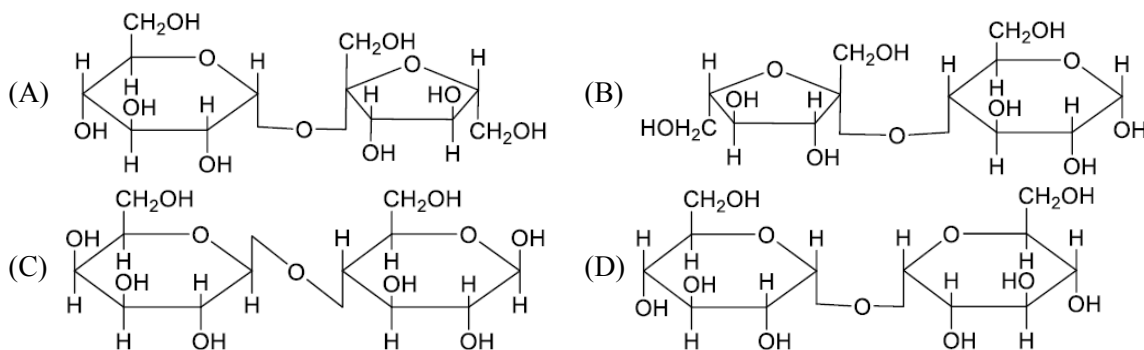
Secondary amine

चूँकि केवल Q सभी परिस्थितियों को पूरा करता है।

अतः, विकल्प (B) सही है।



**Q.4** डाई सैकेराइड X को ब्रोमीन जल द्वारा आक्सीकृत नहीं किया जा सकता। X का अम्लीय जल अपघटन से एक वाम ध्रुवण घूर्णक विलयन प्राप्त होता है। तो डाईसैकेराइड X है



**Ans.** [A]

**Sol.** A तथा D को ब्रोमीन जल द्वारा आक्सीकृत नहीं किया जा सकता क्योंकि उनमें हेमिएसिटल बंध नहीं होता है।

A के अम्लीय अपघटन से एक वाम ध्रुवण घूर्णक विलयन प्राप्त होता है।

A सुक्रोस है जो दक्षिण ध्रुवण घूर्णक है जिसके अम्लीय अपघटन से  $\alpha$ -D-ग्लूकोस तथा  $\beta$ -D-फ्रक्टॉस का मिश्रण प्राप्त होता है, यह मिश्रण वाम ध्रुवण घूर्णक होता है।

### SECTION – 2 (Maximum Mark : 12)

- This section contains **THREE (03)** questions
- Each question has **FOUR** options (A), (B), (C) and (D). **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :
 

Full Marks	: +4	<b>ONLY</b> If (all) the correct option(s) is (are) chosen.
Partial Marks	: +3	If all the four options are correct but <b>ONLY</b> three options are chosen.
Partial Marks	: +2	If three or more options are correct but <b>ONLY</b> two options are chosen, both of which are correct.
Partial Marks	: +1	If two or more options are correct but <b>ONLY</b> one option is chosen and it is a correct option.
Zero Marks	: 0	If unanswered;
Negative Marks	: -2	In all other cases.
- For example, in a question, if (A), (B) and (D) are the **ONLY** three options corresponding to correct answers, than
  - choosing **ONLY** (A), (B) and (D) will get +4 marks;
  - choosing **ONLY** (A) and (B) will get +2 marks;
  - choosing **ONLY** (A) and (D) will get +2 marks;
  - choosing **ONLY** (B) and (D) will get +2 marks;
  - choosing **ONLY** (A) will get +1 mark;
  - choosing **ONLY** (B) will get +1 mark;
  - choosing **ONLY** (D) will get +1 mark;
  - choosing no option(s) (i.e. the question is unanswered) will get 0 marks and choosing any other option(s) will get -2 marks.

**Q.5** वह संकुल जो  $[\text{Pt}(\text{NH}_3)_2\text{Br}_2]$ , द्वारा दर्शाये गये समरूपता के प्रकार को प्रदर्शित कर सकता है [en =  $\text{H}_2\text{NCH}_2\text{CH}_2\text{NH}_2$ ]  
 (A)  $[\text{Pt}(\text{en})(\text{SCN})_2]$       (B)  $[\text{Zn}(\text{NH}_3)_2\text{Cl}_2]$       (C)  $[\text{Pt}(\text{NH}_3)_2\text{Cl}_4]$       (D)  $[\text{Cr}(\text{en})_2(\text{H}_2\text{O})(\text{SO}_4)]^+$

**Ans.** [C, D]

**Sol.**  $[\text{Pt}(\text{NH}_3)_2\text{Cl}_2]$  ज्यामितीय समावयवता प्रदर्शित कर सकता है।

$[\text{Pt}(\text{NH}_3)_2\text{Cl}_4]$ ,  $[\text{Cr}(\text{en})_2(\text{H}_2\text{O})(\text{SO}_4)]^+$  के द्वारा भी ज्यामितीय समावयवता प्रदर्शित की जाती है।

**Q.6** x, y, तथा z धातुओं के परमाणु फलक केन्द्रित घनीय (fcc) एकक कोष्ठिका की कोर (भुजा) की लंबाई  $L_x$ , अन्तः केन्द्रित घनीय (bcc) एकक कोष्ठिका की कोर (भुजा) की लंबाई  $L_y$ , तथा सरल घनीय एकक कोष्ठिका की कोर (भुजा) की लंबाई  $L_z$  क्रमशः है।

यदि  $r_z = \frac{\sqrt{3}}{2} r_y$ ;  $r_y = \frac{8}{\sqrt{3}} r_x$ ;  $M_z = \frac{3}{2} M_y$  तथा  $M_z = 3M_x$ , तब सही कथन है।

[दिया है: x, y, z के मोलर भार  $M_x$ ,  $M_y$ , तथा  $M_z$  क्रमशः है। x, y, तथा z, धातु की परमाणु त्रिज्या  $r_x$ ,  $r_y$ , तथा  $r_z$  क्रमशः है,]

(A) x एकक कोष्ठिका की संकुलन क्षमता > y के एकक कोष्ठिका की संकुलन क्षमता > z के एकक कोष्ठिका की संकुलन क्षमता

(B)  $L_y > L_z$

(C)  $L_x > L_y$

(D) x का घनत्व > y का घनत्व

**Ans.** [A,B,D]

**Sol.** धातु x, FCC बनाती है (कोर की लंबाई  $L_x$ )

धातु y, BCC बनाती है (कोर की लंबाई  $L_y$ )

धातु z, SC बनाती है (कोर की लंबाई  $L_z$ )

दिया है  $r_z = \frac{\sqrt{3}}{2} r_y$  तथा  $r_y = \frac{8}{\sqrt{3}} r_x$

$$\therefore r_z = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{8}{\sqrt{3}} r_x = 4r_x$$

$$M_z = \frac{3}{2} M_y \quad M_x = 3M_x$$

$$\therefore M_y = 2M_x$$

संकुलन क्षमता FCC > BCC > SC

एकक कोष्ठिका की संकुलन क्षमता  $x > y > z$

FCC एकक कोष्ठिका में :- परमाणु के फलक विकर्ण के साथ सम्पर्क में होते हैं।

$$\therefore \sqrt{2} L_x = 4r_x \Rightarrow L_x = 2\sqrt{2} r_x$$

BCC एकक कोष्ठिका में: परमाणु के काय विकर्ण के साथ होते हैं।

$$\therefore \sqrt{3} L_y = 4r_y \Rightarrow L_y = \frac{4}{\sqrt{3}} r_y = \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{8}{\sqrt{3}} r_x = \frac{32}{3} r_x$$

$$L_y = \frac{32}{3} r_x$$

SC एकक कोष्ठिका में: परमाणु कोर के सम्पर्क में होते हैं।

$$\therefore L_z = 2r_z = 2 \times 4r_x = 8r_x$$

$$L_x = 2\sqrt{2} r_x$$

$$L_y = \frac{32}{3} r_x$$

$$L_z = 8r_x$$

$$\therefore L_y > L_z > L_x$$

X का घनत्व (x के प्रति एकक कोष्ठिका में परमाणु की संख्या (z) = 4)

$$d_x = \frac{zM_x}{(L_x)^3 N_A} = \frac{4 \times M_x}{(2\sqrt{2}r_x)^3 \times N_A}$$

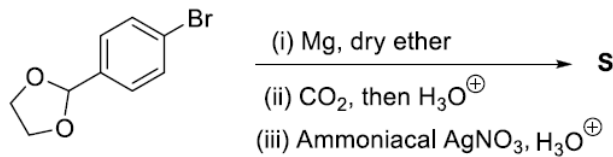
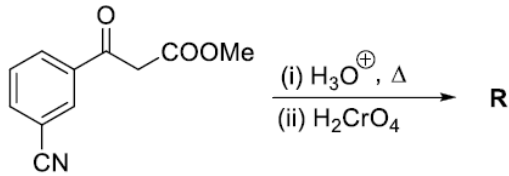
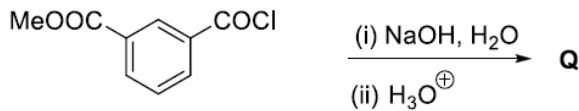
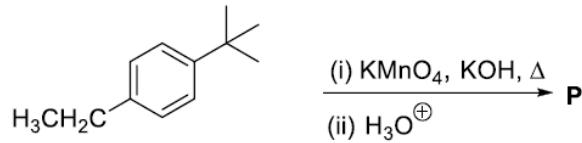
$$= \frac{4M_x}{16\sqrt{2}r_x^3 N_A} = \frac{M_x}{4\sqrt{2}r_x^3 N_A}$$

y का घनत्व: (y के प्रति एकक कोष्ठिका में परमाणु की संख्या (z) = 2)

$$d_y = \frac{zM_y}{(L_y)^3 N_A} = \frac{2 \times 2M_x}{\left(\frac{32}{3}r_x\right)^3 N_A} = \frac{108M_x}{32768r_x^3 N_A}$$

$\therefore$  x का घनत्व > y का घनत्व.

**Q.7** दी गयी अभिक्रिया में **P**, **Q**, **R**, तथा **S** मुख्य उत्पाद है।



**P**, **Q**, **R**, तथा **S** के बारे में सही कथन है।

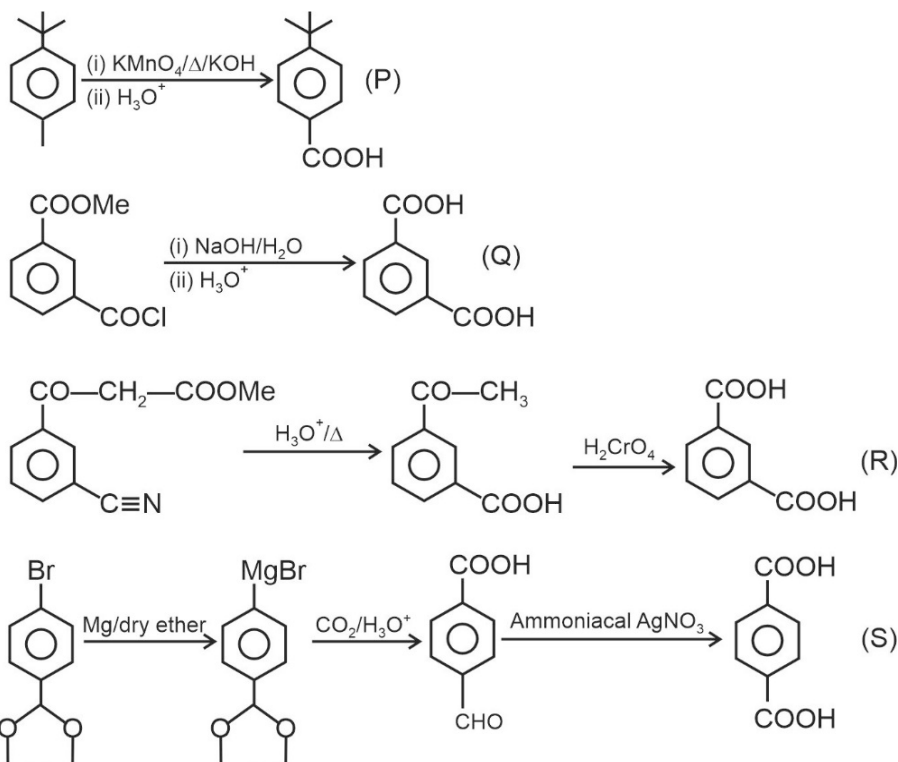
(A) **P** और **Q** क्रमशः पॉलिमर डेक्रॉन और ग्लाइप्टल के मोनोमर्स हैं।

(B) **P**, **Q**, तथा **R** डाई कार्बोक्सिलिक अम्ल हैं।

(C) यौगिक **Q** तथा **R** समान हैं।

(D) **R** एलडाल सघटन से क्रिया नहीं करता तथा **S** के कैनिजारो अभिक्रिया से क्रिया नहीं करता है।

**Ans.** [C, D]

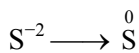
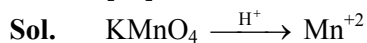
**Sol.**

**SECTION – 3 (Maximum Marks: 24)**

- This section contains **SIX (06)** questions.
- The answer to each question is a **NON-NEGATIVE INTERGER**.
- For each question, enter the correct integer corresponding to the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :
 

Full Marks	: +4	If <b>ONLY</b> the correct integer is entered;
Zero Marks	: 0	In all other cases.

**Q.8**  $\text{H}_2\text{S}$  (5 मोल) अम्लीय जलीय पोटेशियम परमैंगनेट के विलयन के साथ पूरी तरह से अभिक्रिया करता है। इस अभिक्रिया में उत्पादित पानी के मोल की संख्या  $x$  है। तथा इसमें सम्मिलित इलेक्ट्रॉन के मोल की संख्या  $y$  है।  $(x + y)$  का मान --- है।

**Ans.** [18]



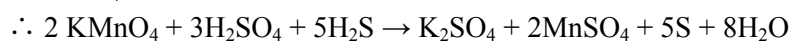
$$\therefore \text{KMnO}_4 \text{ का } n_{\text{factor}} = 5$$

$$\text{S}^{-2}(\text{H}_2\text{S}) \text{ का } n_{\text{factor}} = 2$$

$$(n_{\text{KMnO}_4} \times 5) = (5 \times 2)_{\text{H}_2\text{S}}$$

$$[(\text{GEN})_{\text{KMnO}_4} = (\text{GEP})_{\text{H}_2\text{S}}]$$

$$\therefore n_{\text{KMnO}_4} = 2$$



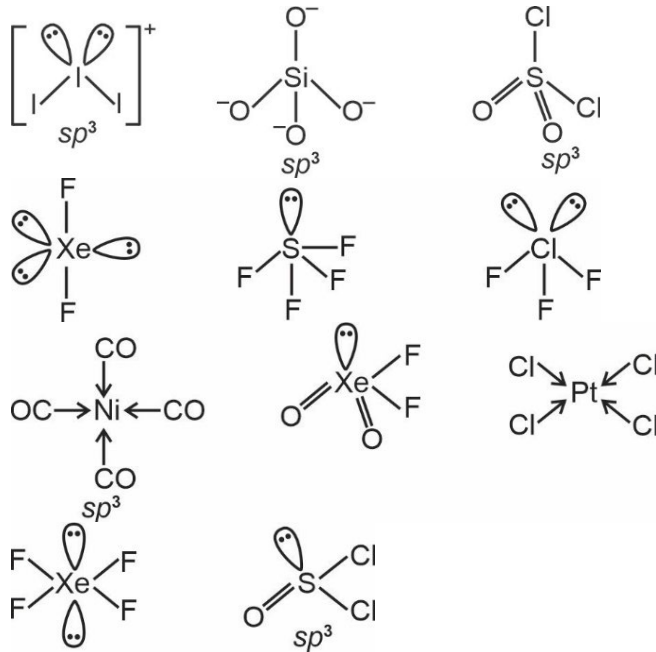
उत्पादित जल के मोलो की संख्या = '8'

सम्मिलित इलेक्ट्रॉनों के मोलो की संख्या = 10

$$\therefore x = 8, y = 10 \Rightarrow (x + y) = 18$$

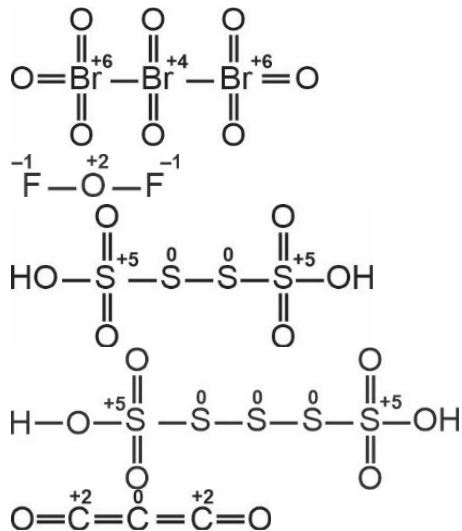
**Q.9**  $[I_3]^+$ ,  $[SiO_4]^{4-}$ ,  $SO_2Cl_2$ ,  $XeF_2$ ,  $SF_4$ ,  $ClF_3$ ,  $Ni(CO)_4$ ,  $XeO_2F_2$ ,  $[PtCl_4]^{2-}$ ,  $XeF_4$ , तथा  $SOCl_2$ , के बीच  $sp^3$  संकरित केन्द्रिय परमाणु वाली स्पीशीज की कुल संख्या \_\_\_\_\_ है।

**Ans.** [5]  
**Sol.**



**Q.10** निम्नलिखित अणुओं पर विचार कीजिए  $Br_3O_8$ ,  $F_2O$ ,  $H_2S_4O_6$ ,  $H_2S_5O_6$ , तथा  $C_3O_2$ . प्रत्येक अणु में उनके शून्य ऑक्सीकरण अवस्था में स्थित परमाणुओं की संख्या की गणना करे उनका योग \_\_\_\_\_ है।

**Ans.** [6]  
**Sol.**



शून्य ऑक्सीकरण अवस्था वाले कुल परमाणु की संख्या 6 है।

**Q.11**  $He^+$  के लिए 105.8 त्रिज्या की कक्षा से 26.45 त्रिज्या की कक्षा में सक्रमण होता है। सक्रमण के दौरान उत्सर्जित फोटोन की तरंगदैर्घ्य (nm) \_\_\_\_\_ है

[उपयोग - बोहर कक्षक,  $a = 52.9 \text{ pm}$ ; रिडबर्ग नियतांक,  $R_H = 2.2 \times 10^{-18} \text{ J}$ ; प्लांक नियतांक,  $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J s}$ ; प्रकाश की चाल,  $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ]

**Ans.** [30]

**Sol.**  $r = 52.9 \times \frac{n^2}{z} \text{ pm}$

$$\therefore 105.8 = \frac{52.9 \times n^2}{2} \quad \therefore n_2 = 2$$

तथा  $26.45 = 52.9 \times \frac{n^2}{2} \quad \therefore n_1 = 1$

$$\therefore \Delta E = R_H h C \times z^2 \left[ \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right]$$

$$\frac{hc}{\lambda} = R_H h C \times z^2 \left[ \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right]$$

$$\frac{6.6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{\lambda} = 2.2 \times 10^{-18} \times 4 \times \left[ \frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right]$$

$$\frac{6.6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{\lambda} = 2.2 \times 10^{-18} \times 4 \times \frac{3}{4}$$

$$\therefore \lambda = 300 \text{ \AA}$$

$$\therefore \lambda = 30 \text{ nm}$$

**Q.12** 0.2 मोल यूरिया का 50ML विलयन (घनत्व  $1.012 \text{ g mL}^{-1}$  300 ताप पर) 0.06 ग्राम यूरिया युक्त विलयन के 250 mL के साथ मिलाया जाता है। दोनो विलयन एक ही विलायक में तैयार किये गये है। 300 K ताप पर परिणामी विलयन का परासरण दाब (टोर मे) \_\_\_ है।

उपयोग – यूरिया का मोलर द्रव्यमान =  $60 \text{ g mol}^{-1}$ ; गैस नियंताक  $R = 62 \text{ L Torr K}^{-1}$  मान ले  $\Delta_{\text{mix}}H = 0, \Delta_{\text{mix}}V = 0$

**Ans.** [682]

**Sol.** यूरिया के मोल = 0.2

यूरिया का भार =  $0.2 \times 60 = 12 \text{ g}$

विलायक का भार = 1000 g

विलयन का भार = 1012 g

$$\therefore \text{विलयन का आयतन} = \frac{1012}{1.012} = 1000 \text{ ml}$$

$\therefore$  1000 ml विलयन मे 0.2 मोल प्राप्त होते है

$$\therefore 50 \text{ ml विलयन से प्राप्त} = \frac{0.2 \times 50}{1000} = 0.01$$

$$\text{अन्य विलयन मे यूरिया के मोल} = \frac{0.06}{60} = 0.001$$

$$\therefore \text{विलयन की सान्द्रता} = \frac{0.01 + 0.001}{\frac{300}{1000}} = 0.0366$$

$$\therefore \pi = CRT$$

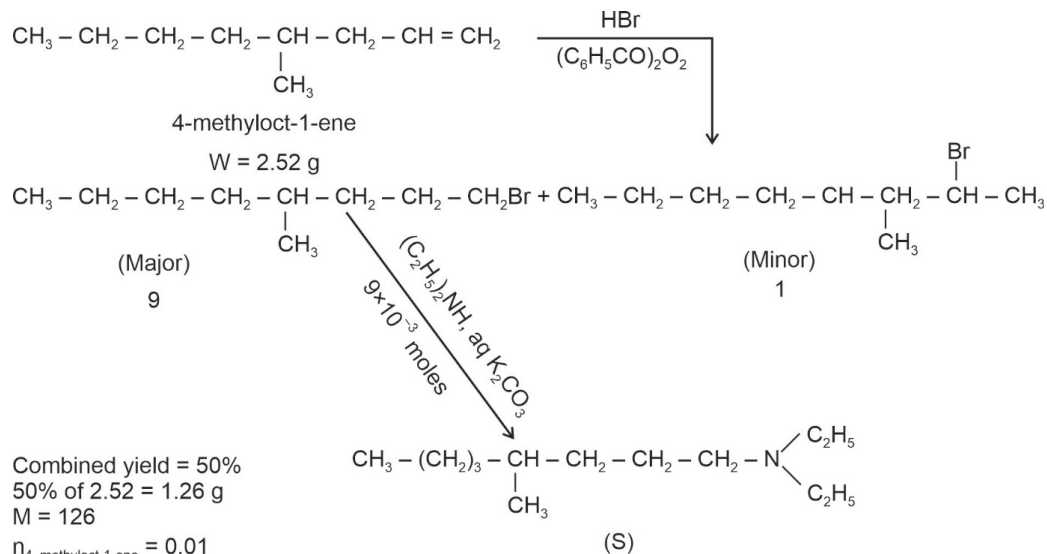
$$= 0.0366 \times 62 \times 300 = 682$$

**Q.13**  $(C_6H_5CO)_2O_2$  की उपस्थिति में HBr के साथ 4-मिथाइल आक्ट-1-ईन (P.2.0 mL) की अभिक्रिया से 9 : 1 अनुपात के दो समावयवी ब्रोमाइड 50% सयुक्त उत्पादन के साथ प्राप्त होते हैं इनमें से प्राथमिक एल्काइल ब्रोमाइड की पुरी मात्रा को डाइ एथाइल एमीन की उचित मात्रा के साथ अभिक्रिया करायी जाती है। और उसके बाद जलीय  $K_2CO_3$  के साथ क्रिया करायी जाती है। तो एक मान आयनिक उत्पाद **S** 100% उत्पादित होता है प्राप्त **S** का द्रव्यमान (मिलीग्राम में) \_\_\_ है।

उपयोग – मोलर द्रव्यमान ( $g\ mol^{-1}$  में) H = 1, C = 12, N = 14, Br = 80]

**Ans. [1791]**

**Sol.**



Combined yield = 50%  
50% of 2.52 = 1.26 g  
M = 126

$n_{4\text{-methyloct-1-ene}} = 0.01$   
90% of 0.01 = 0.009

S का द्रव्यमान =  $0.009 \times 199$

= 1.791 g

= 1791 mg

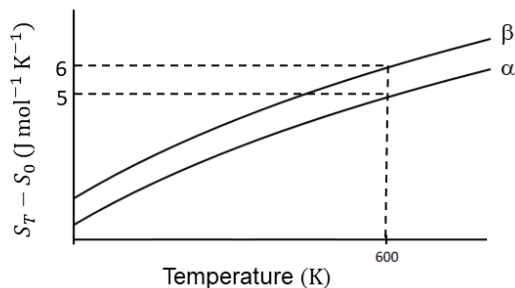
### SECTION – 4 (Maximum Marks: 12)

- This section contains **TWO (02)** paragraphs.
- Based on each paragraph, there are **TWO (02)** questions.
- The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- If the numerical value has more than two decimal places, **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal places.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :
 

Full Marks	: +3	if <b>ONLY</b> the correct numerical value is entered in the designated place;
Zero Marks	: 0	In all other cases.

**“PARAGRAPH I” (Q.14 & 15)**

1 बार दाब पर  $\alpha$  तथा  $\beta$  प्रावस्था के लिए तापमान के सापेक्ष एन्ट्रॉपी का वक्र दर्शाया गया है OK तथा T ताप पर प्रावस्था की एन्ट्रॉपी क्रमशः  $S_T$  तथा  $S_0$  है।



$\alpha$  तथा  $\beta$  की अवस्था परिवर्तन के लिए सक्रमण ताप 600 K तथा  $C_{p,\beta} - C_{p,\alpha} = 1 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$  है। मान ले  $(C_{p,\beta} - C_{p,\alpha})$  200 से 700 K. की परास में स्वतंत्र तापमान है।  $\alpha$  तथा  $\beta$  अवस्था की उष्मा क्षमता क्रमशः  $C_{p,\alpha}$  तथा  $C_{p,\beta}$  है।

**Q.14** 300 K ताप पर  $(S_\beta - S_\alpha)$  ( $\text{mol}^{-1} \text{K}^{-1}$  में) एन्ट्रॉपी में परिवर्तन का मान है।

[उपयोग:  $\ln 2 = 0.69$ ; दिया है:  $S_\beta - S_\alpha = 0$  at 0 K]

**Ans.** [0.31]

**Sol.** 
$$\Delta S_{600} - \Delta S_{300} = \int_{300}^{600} \frac{1 \times (C_{p,\beta} - C_{p,\alpha}) dT}{T}$$

$$= 1 \times 1 \times \left( \ln \frac{T_2}{T_1} \right) \left( \begin{matrix} T_2 = 600\text{k} \\ T_1 = 300\text{K} \end{matrix} \right)$$

$$1 - \Delta S_{300} = 1 \times 1 \times \ln 2$$

$$\Delta S_{300} = 1 - 0.69$$

$$\Delta S_{300} = 0.31 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$$

**Q.15** 300 K ताप पर  $H_\beta - H_\alpha$  ( $\text{mol}^{-1}$  में) एन्थैल्पी में परिवर्तन का मान है।

**Ans.** [300]

**Sol.** 
$$\Delta H_{600} - \Delta H_{300} = 1 \times (C_{p,\beta} - C_{p,\alpha}) (600 - 300)$$

अब, सक्रमण ताप पर

$$\Delta H_{600} = T \Delta S_{600}$$

$$= 600 \times (6 - 5)$$

$$= 600 \text{ J mol}^{-1}$$

$$600 - \Delta H_{300} = 1 \times 1 \times 300$$

$$\Delta H_{300} = 600 - 300$$

$$= 300 \text{ J mol}^{-1}$$

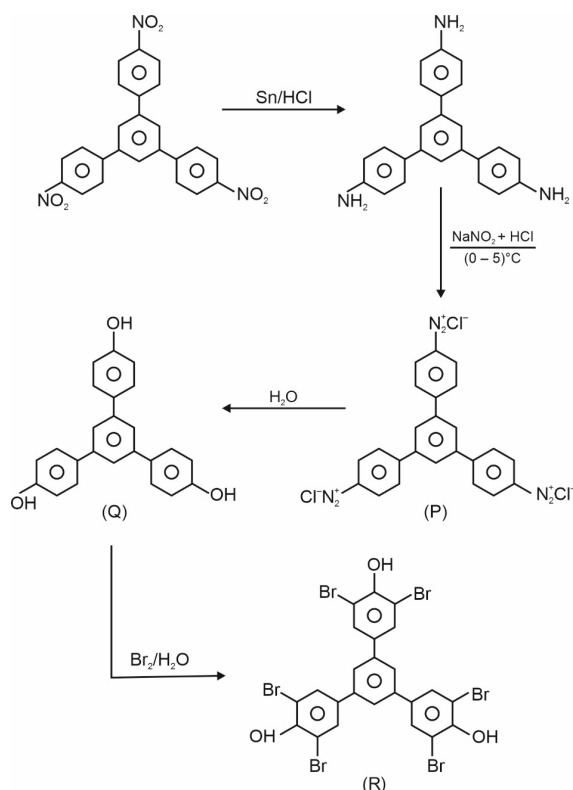
**“PARAGRAPH II” (Q.16 & 17)**

एक ट्राई नाइट्रॉ यौगिक 1,3,5- ट्रिस (4-नाइट्रोफेनिल) बैजीन  $\text{Sn}/\text{HCl}$  के आधिक्य के साथ पूर्ण अभिक्रिया पर एक मुख्य उत्पाद देता है। जो  $0^\circ\text{C}$  पर  $\text{NaNO}_2/\text{HCl}$  की आधिक्य से क्रिया करके उत्पाद के रूप में P प्रदान करता है P कमरे के ताप पर  $\text{H}_2\text{O}$  के आधिक्य के साथ क्रिया करके उत्पाद Q देता है जलीय माध्यम में Q का ब्रोमिनेशन उत्पाद R प्रस्तुत करता है। यौगिक P मूल परिस्थितियों में फिनॉल के आधिक्य के साथ क्रिया करके उत्पाद S देता है। यौगिक Q तथा R के बीच मोलर द्रव्यमान का अंतर  $474 \text{ g mol}^{-1}$  तथा P तथा S के बीच मोलर द्रव्यमान का अंतर  $172.5 \text{ g mol}^{-1}$  है।



- Q.16** R के एक अणु में स्थित विषम परमाणुओं की संख्या \_\_\_\_\_ है।  
 उपयोग – मोलर द्रव्यमान ( $\text{g mol}^{-1}$ ): H = 1, C = 12, N = 14, O = 16, Br = 80, Cl = 35.5  
 C तथा H के अलावा अन्य परमाणुओं को विषम परमाणु माना जाता है।

**Ans.** [9]  
**Sol.**

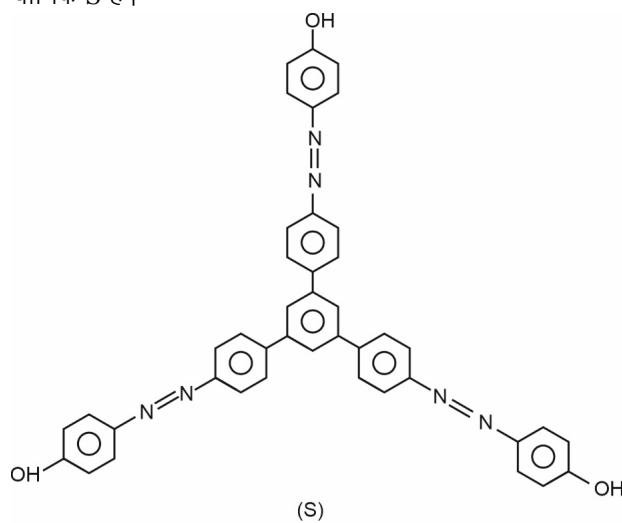


R में विषम परमाणुओं की संख्या 9 है।

- Q.17** S के एक अणु में स्थित कार्बन परमाणुओं और विषम परमाणुओं की कुल संख्या \_\_\_\_\_ है।  
 उपयोग – मोलर द्रव्यमान ( $\text{g mol}^{-1}$ ): H = 1, C = 12, N = 14, O = 16, Br = 80, Cl = 35.5  
 C तथा H के अलावा अन्य परमाणुओं को विषम परमाणु माना जाता है।

**Ans.** [51]

**Sol.** यौगिक S है।



कार्बन परमाणुओं की संख्या + विषम परमाणुओं की संख्या = 51

# JEE Advanced Exam 2023 (Paper & Solution)

Date : 04 / 06 / 2023

## PAPER-2

### MATHEMATICS

#### SECTION – 1 (Maximum Mark : 12)

- This section contains **FOUR (04)** questions.
- Each question has four options (A), (B), (C) and (D). **Only one** of these four option is the correct answer.
- For each question, choose the option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :  
Full Marks : +3 If **ONLY** the correct option is chosen;  
Zero Marks : 0 If none of the option is chosen (i.e. the question is unanswered);  
Negative Marks : -1 In all other cases.

**Q.1** मान लीजिए  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  एक अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि  $f(1) = \frac{1}{3}$  तथा

$3 \int_1^x f(t) dt = xf(x) - \frac{x^3}{3}, x \in [1, \infty)$ . मान लीजिए  $e$  प्राकृतिक लघुगुणक के आधार को दर्शाता है तो  $f(e)$  का मान है -

(A)  $\frac{e^2 + 4}{3}$                       (B)  $\frac{\log_e 4 + e}{3}$                       (C)  $\frac{4e^2}{3}$                       (D)  $\frac{e^2 - 4}{3}$

**Ans.** [C]

**Sol.**  $3 \int_1^x f(t) dt = xf(x) - \frac{x^3}{3}$

$$\Rightarrow 3f(x) = f(x) + xf'(x) - x^2$$

$$\Rightarrow xf'(x) - 2f(x) = x^2$$

$$\Rightarrow f'(x) - \frac{2}{x}f(x) = x \Rightarrow (\text{रैखिक अवकल समीकरण})$$

$$\Rightarrow \text{I.F.} = e^{-\frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow y \left( \frac{1}{x^2} \right) = \int x \times \frac{1}{x^2} dx = \ln x + C$$

$$\Rightarrow y = x^2 (\ln x + C)$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 (\ln x + C)$$

$$\Rightarrow f(1) = 1 (0 + C) \Rightarrow C = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(e) = e^2 \left( \ln e + \frac{1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow f(e) = \frac{4e^2}{3}$$

**Q.2** एक सिक्के को बार बार उछालने के प्रयोग पर विचार करें जब तक कि लगातार दो उछालों का परिणाम समान न हो। यदि किसी यादृच्छिक उछाल में चित आने की प्रायिकता  $\frac{1}{3}$  है तो प्रयोग चित के साथ बंद होने की प्रायिकता है -

- (A)  $\frac{1}{3}$                       (B)  $\frac{5}{21}$                       (C)  $\frac{4}{21}$                       (D)  $\frac{2}{7}$

**Ans. [B]**

**Sol.**  $P(H) = \frac{1}{3}$

$$P(T) = \frac{2}{3}$$

$$P(E) = P(HH) + P(THH) + P(HTHH) + P(THTHH) + P(HTHTHH) + P(THTHTHH) + \dots$$

$$= \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{4}{3^5} + \frac{4}{3^6} + \frac{8}{3^7} + \frac{8}{3^8} + \dots$$

$$= \left( \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{4}{3^6} + \dots \right) + \left( \frac{2}{3^3} + \frac{4}{3^5} + \frac{8}{3^7} + \dots \right)$$

$$P(E) = \frac{1}{7} + \frac{2}{21} = \frac{5}{21}$$

**Q.3** किसी  $y \in \mathbb{R}$  के लिए मान लीजिए  $\cot^{-1}(y) \in (0, \pi)$  और  $\tan^{-1}(y) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  तो  $0 < |y| < 3$ , के लिए समीकरण

$$\tan^{-1}\left(\frac{6y}{9-y^2}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{9-y^2}{6y}\right) = \frac{2\pi}{3}$$
 के सभी हलों का योग बराबर होगा -

- (A)  $2\sqrt{3} - 3$                       (B)  $3 - 2\sqrt{3}$                       (C)  $4\sqrt{3} - 6$                       (D)  $6 - 4\sqrt{3}$

**Ans. [C]**

**Sol.**  $\tan^{-1}\left(\frac{6y}{9-y^2}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{9-y^2}{6y}\right) = \frac{2\pi}{3}$   $0 < |y| < 3 \Rightarrow y \in (-3, 3) - \{0\}$

स्थिति -I:  $\frac{6y}{9-y^2} > 0 \Rightarrow y > 0$

$$\tan^{-1}\left(\frac{6y}{9-y^2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{6y}{9-y^2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2\tan^{-1}\left(\frac{6y}{9-y^2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{6y}{9-y^2}\right) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{6y}{9-y^2} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 6y = 9\sqrt{3} - \sqrt{3}y^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}y^2 + 6y - 9\sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}y^2 + 9y - 3y - 9\sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}y(y + 3\sqrt{3}) - 3(y + 3\sqrt{3}) = 0$$

$$\Rightarrow (y + 3\sqrt{3}) - (\sqrt{3}y - 3) = 0$$

$$y \neq -3\sqrt{3}$$

$$\therefore y = \sqrt{3} \text{ as } y \in (0, 3)$$

$$\text{स्थिति - II: } \frac{6y}{9-y^2} < 0 \Rightarrow y < 0$$

$$\tan^{-1} \left( \frac{6y}{9-y^2} \right) + \pi + \tan^{-1} \left( \frac{6y}{9-y^2} \right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2\tan^{-1} \left( \frac{6y}{9-y^2} \right) = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \tan^{-1} \left( \frac{6y}{9-y^2} \right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{6y}{9-y^2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{3}y = -9 + y^2$$

$$\Rightarrow y^2 - 6\sqrt{3}y - 9 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{6\sqrt{3} \pm \sqrt{108+36}}{2} = \frac{6\sqrt{3} \pm 12}{2} = 3\sqrt{3} \pm 6 \text{ as } y \in (-3, 0)$$

$$\therefore y = 3\sqrt{3} - 6$$

$$\therefore \text{हलों का योग} = \sqrt{3} + (3\sqrt{3} - 6) = 4\sqrt{3} - 6$$

**Q.4** मान लीजिए बिन्दुओं P, Q, R तथा S के स्थिति सदिश क्रमशः  $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ ,  $\vec{b} = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$ ,

$\vec{c} = \frac{17}{5}\hat{i} + \frac{16}{5}\hat{j} + 7\hat{k}$  तथा  $\vec{d} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ , है। तो निम्नलिखित में कौनसा कथन सत्य है ?

(A) बिन्दु P, Q, R तथा S समतलीय नहीं है।

(B)  $\frac{\vec{b} + 2\vec{d}}{3}$  एक बिन्दु का स्थिति सदिश है, जो PR को आन्तरिक रूप से 5 : 4 में विभाजित करता है।

(C)  $\frac{\vec{b} + 2\vec{d}}{3}$  एक बिन्दु का स्थिति सदिश है जो PR को बाह्य रूप से 5 : 4 में विभाजित करता है।

(D) सदिश  $\vec{b} \times \vec{d}$  का परिमाण का वर्ण 95 है।

**Ans. [B]**

**Sol.** P(1, 2, -5), Q(3, 6, 3), R  $\left(\frac{17}{5}, \frac{16}{5}, 7\right)$ , S(2, 1, 1)

$$\frac{\vec{b} + 2\vec{d}}{3} = \frac{7\hat{i} + 8\hat{j} + 5\hat{k}}{3}$$

$$\begin{array}{c} \text{-----} \text{-----} \text{-----} \text{-----} \text{-----} \\ | \qquad \qquad \qquad | \qquad \qquad \qquad | \qquad \qquad \qquad | \\ P(1, 2, -5) \qquad \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right) \qquad \qquad \qquad R\left(\frac{17}{5}, \frac{16}{5}, 7\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{17\lambda}{5} + 1 = \frac{7}{3}(\lambda + 1)$$

$$\Rightarrow 51\lambda + 15 = 35\lambda + 35$$

$$\Rightarrow 16\lambda = 20 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{4}$$

**SECTION – 2 (Maximum Mark : 12)**

- This section contains **THREE (03)** questions
- Each question has **FOUR** options (A), (B), (C) and (D). **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :
 

Full Marks	: +4	<b>ONLY</b> If (all) the correct option(s) is (are) chosen.
Partial Marks	: +3	If all the four options are correct but <b>ONLY</b> three options are chosen.
Partial Marks	: +2	If three or more options are correct but <b>ONLY</b> two options are chosen, both of which are correct.
Partial Marks	: +1	If two or more options are correct but <b>ONLY</b> one option is chosen and it is a correct option.
Zero Marks	: 0	If unanswered;
Negative Marks	: -2	In all other cases.
- For example, in a question, if (A), (B) and (D) are the **ONLY** three options corresponding to correct answers, than
  - choosing **ONLY** (A), (B) and (D) will get +4 marks;
  - choosing **ONLY** (A) and (B) will get +2 marks;
  - choosing **ONLY** (A) and (D) will get +2 marks;
  - choosing **ONLY** (B) and (D) will get +2 marks;
  - choosing **ONLY** (A) will get +1 mark;
  - choosing **ONLY** (B) will get +1 mark;
  - choosing **ONLY** (D) will get +1 mark;
  - choosing no option(s) (i.e. the question is unanswered) will get 0 marks and choosing any other option(s) will get -2 marks.

**Q.5** मान लीजिए  $M = (a_{ij})$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $3 \times 3$  की आव्यूह इस प्रकार है कि  $a_{ij} = 1$  यदि  $j + 1, i$  द्वारा विभाजित है अन्यथा  $a_{ij} = 0$ , तो निम्नलिखित में से कौनसा कथन सत्य है (हैं) ?

(A)  $M$  व्युत्क्रमणिय है।

(B) एक अशून्य आव्यूह  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  इस प्रकार विद्यमान है कि  $M \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$

(C) समुच्चय  $\{X \in \mathbb{R}^3 : MX = 0\} \neq \{0\}$ , जहाँ  $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(D) आव्यूह  $(M - 2I)$  व्युत्क्रमणिय है, जहाँ  $I$ ,  $3 \times 3$  की तत्समक आव्यूह है।

**Ans.** [B, C]

**Sol.**  $M = (a_{ij})$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$a_{ij} = 1, \text{ यदि } j + 1, i \text{ से विभाजित है अन्यथा } a_{ij} = 0 \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|M| = 1(-1) - 1(-1) = -1 + 1 = 0$$

( $M$  व्युत्क्रमणिय नहीं है)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 \\ a_1 + a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{bmatrix}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = -a_1 \quad a_1 + a_3 = -a_2 \quad a_2 = -a_3$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0 \quad a_2 + a_3 = 0$$

$$\downarrow$$

$$a_1 = 0 \quad \& \quad a_2 + a_3 = 0$$

⇒ एक स्तम्भ आव्यूह विद्यमान है (अनन्त संभावनाएँ)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ हॉ यह संभव है।}$$

$$|M-2I| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1(3) - 1(-2-1) = -3 + 3 = 0$$

- Q.6** मान लीजिए  $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$  फलन परिभाषित है  $f(x) = [4x] \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)$ , जहाँ  $[x]$   $x$  से कम या उसके बराबर अधिकतम पूर्णांक को दर्शाता है। तो निम्नलिखित में से कौनसा कथन सत्य है (हैं)?
- (A) फलन  $f$ ,  $(0, 1)$  में ठीक एक बिन्दु पर असंतत है।  
 (B)  $(0, 1)$  में ठीक एक बिन्दु जिस पर फलन  $f$  संतत लेकिन अवकलनीय नहीं है।  
 (C) फलन  $f$ ,  $(0, 1)$  में तीन से अधिक बिन्दुओं पर अवकलनीय नहीं है।  
 (D) फलन  $f$  की न्यूनतम मान  $-\frac{1}{512}$  है।

**Ans.** [A, B]

**Sol.**  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = [4x] \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \text{महत्वपूर्ण बिन्दु } x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$$

$$(x = \frac{3}{4} \text{ पर असंतत})$$

$$(x = \frac{1}{4} \text{ पर संतत एवं अवकलनीय})$$

$$(x = \frac{1}{2} \text{ पर संतत लेकिन अवकलनीय नहीं})$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ पर बायाँ अवकलज} \quad x = \frac{1}{4} \text{ पर दायाँ अवकलज}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{0-0}{-h} = 0 \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 \left(-\frac{1}{2} + h\right)}{h} = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ पर बायाँ अवकलज} \quad x = \frac{1}{2} \text{ पर दायाँ अवकलज}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{4} - h\right)^2 (-h) - 0}{-h} = \frac{1}{16}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2\left(\frac{1}{4} + h\right)^2 h - 0}{h} = \frac{1}{8}$$

(न्यूनतम -ve मान  $\frac{1}{4}$  व  $\frac{1}{2}$  के मध्य विद्यमान होगा)

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right) \left(3x - \frac{5}{4}\right) \Rightarrow x = \frac{5}{12} \text{ पर निम्निष्ठी}$$

$$f\left(\frac{5}{12}\right) = \frac{1}{36} \times \frac{-1}{12} = \frac{-1}{432}$$

**Q.7** मान लीजिए कि  $S, R$  से  $R$  तक के सभी द्विअवकलनीय फलनों का समुच्चय इस प्रकार है कि  $\frac{d^2f}{dx^2}(x) > 0$ ,

$\forall x \in (-1, 1), f \in S$  के लिए मान लीजिए  $X_f$  बिन्दुओं की संख्या  $x \in (-1, 1)$  जिसके लिये  $f(x) = x$ . तो निम्नलिखित में से कौनसा कथन सत्य है ?

- (A) एक फलन  $f \in S$  इस प्रकार विद्यमान है कि  $X_f = 0$
- (B) प्रत्येक फलन  $f \in S$  के लिये  $X_f \leq 2$
- (C) एक फलन  $f \in S$  इस प्रकार विद्यमान है कि  $X_f = 2$
- (D)  $S$  में ऐसा कोई फलन विद्यमान नहीं है जिससे  $X_f = 1$

**Ans.** [A, B, C]

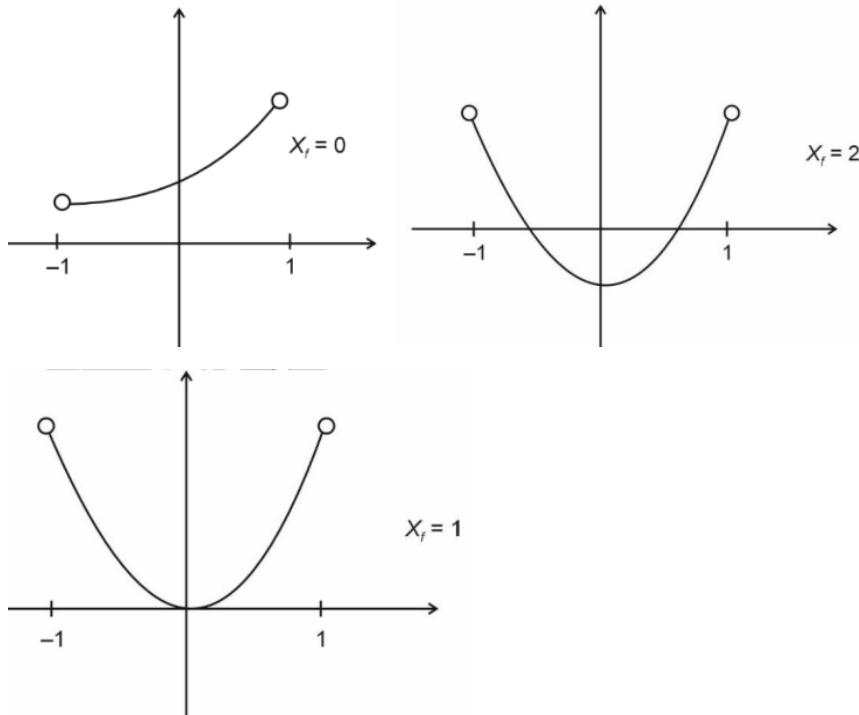
**Sol.**  $f''(x) > 0; f(x) - x = 0$

हलो की संख्या = ?

मान लीजिए  $g(x) = f(x) - x \Rightarrow g'(x) = f'(x) - 1$

$g''(x) = f''(x) > 0 \Rightarrow$  अवतल

संभावनाएँ



**SECTION – 3 (Maximum Marks: 24)**

- This section contains **SIX (06)** questions.
- The answer to each question is a **NON-NEGATIVE INTERGER**.
- For each question, enter the correct integer corresponding to the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :  
 Full Marks : +4 If **ONLY** the correct integer is entered;  
 Zero Marks : 0 In all other cases.

**Q.8**  $x \in \mathbb{R}$  के लिये, मान लीजिये  $\tan^{-1}(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . तो  $f(x) = \int_0^{x \tan^{-1} x} \frac{e^{(t-\cos t)}}{1+t^{2023}} dt$  द्वारा परिभाषित फलन  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

का अधिकतम मान है -

**Ans.** [0]

**Sol.**  $f'(x) = \frac{e^{[x \tan^{-1} x - \cos(x \tan^{-1} x)]}}{1 + (x \tan^{-1} x)^{2023}} \times \left( \frac{x}{1+x^2} + \tan^{-1} x \right)$

$f'(x) = g(x) \cdot h(x)$

जहाँ  $g(x) = \frac{e^{[x \tan^{-1} x - \cos(x \tan^{-1} x)]}}{1 + (x \tan^{-1} x)^{2023}} > 0 \forall x$

और  $h(x) = \frac{x}{1+x^2} + \tan^{-1} x < 0$  for  $x < 0$

$= 0$   $x = 0$   $> 0$   $x > 0$

$\therefore (x = 0$  पर  $f(x)$  निम्नतम है)

और  $f(x)_{\min} = f(0) = 0$

**Q.9**  $x \in \mathbb{R}$  के लिए, मान लीजिये  $y(x)$  अवकलनीय समीकरण  $(x^2 - 5) \frac{dy}{dx} - 2xy = -2x(x^2 - 5)^2$  का एक हल इस प्रकार है कि

$y(2) = 7$  तो फलन  $y(x)$  का अधिकतम मान है-

**Ans.** [16]

**Sol.**  $(x^2 - 5) \frac{dy}{dx} - 2xy = -2x(x^2 - 5)^2$

$\frac{dy}{dx} + \left( \frac{-2x}{x^2 - 5} \right) y = -2x(x^2 - 5)$

I.F. =  $\frac{1}{|x^2 - 5|}$

DE. का हल  $y \cdot \frac{1}{|x^2 - 5|} = \int -2x \cdot \frac{x^2 - 5}{|x^2 - 5|} dx \Rightarrow \frac{y}{|x^2 - 5|} = \frac{x^2 - 5}{|x^2 - 5|} (-x^2) + C$  है

$\therefore y(2) = 7 \Rightarrow C = 3$

$\Rightarrow y = -x^2(x^2 - 5) + 3|x^2 - 5| \Rightarrow y = (f(x))$  सम फलन है)

यदि  $0 < x < \sqrt{5}$ ,  $y = -x^4 + 5x^2 - 3x^2 + 15 = -x^4 + 2x^2 + 15$

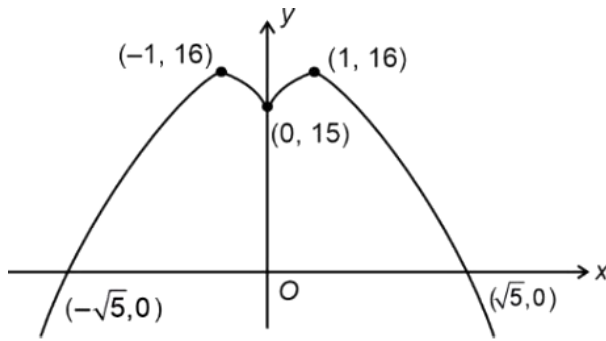
वर्धमान फलन के लिये  $\frac{dy}{dx} > 0 \Rightarrow x < 1$

यदि  $x > \sqrt{5}$ ,  $y = -x^4 + 5x^2 + 3x^2 - 15$

वर्धमान फलन के लिये  $\frac{dy}{dx} > 0 \Rightarrow x = \phi$

$\Rightarrow y(x)$  वर्धमान समाप्त  $(0, 1)$  पर





$$\Rightarrow f(x)_{\max} = 16$$

- Q.10** मान लीजिए  $X, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 0$  का उपयोग करके बनाई गई सभी पांच अंकों की संख्या का समुच्चय है। उदाहरण के लिये 22240  $X$  में है जबकि 02244 तथा 44422  $X$  में नहीं है। मान लीजिए  $X$  के प्रत्येक अवयव को चुने जाने की समान संभावना है। मान लीजिए  $p$  शर्त प्रायिकता है कि यादृच्छिक रूप से चुना गया अवयव एक 20 का गुणक है। दिया है कि यह एक 5 का गुणक है तो  $38p$  का मान बराबर है।

**Ans.** [31]

**Sol.** 5 से विभाजित पांच अंको की संख्या ( \_\_\_\_\_ 0)

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_0$$

$$2224 \longrightarrow 4$$

$$2244 \longrightarrow 6$$

$$2221 \longrightarrow 4$$

$$2241 \longrightarrow 12$$

$$2441 \longrightarrow \frac{12}{38}$$

5 से विभाजित 5 अंको की संख्या लेकिन 20 से विभाजित नहीं हो।

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_1 \quad \underbrace{\quad}_0$$

$$222 \longrightarrow 1$$

$$224 \longrightarrow 3$$

$$244 \longrightarrow \frac{3}{7}$$

5 तथा 20 से विभाजित 5 अंको की संख्या =  $38 - 7 = 31$

$$P = \frac{31}{38}$$

$$38p = 31$$

- Q.11** मान लीजिये  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_8$  एक सामान्य अष्टभुज के शीर्ष त्रिज्या 2 के एक वृत्त पर स्थित है। मान लीजिए  $P$  एक बिन्दु वृत्त पर स्थित है और माना  $PA_i$  बिन्दुओं  $P$  तथा  $A_i$  के मध्य दूरी को दर्शाता है। ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) यदि  $P$  वृत्त के ऊपर बदलता है तो  $PA_1 \cdot PA_2 \cdot \dots \cdot PA_8$  का अधिकतम मान है -

**Ans.** [512]

**Sol.**  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_8$  त्रिज्या 2 के एक वृत्त पर स्थित एक नियमित अष्टभुज के शीर्ष है

$$\text{मान लीजिए, } Z = (2) (1)^{1/8}$$

$$\Rightarrow Z^8 = 2^8 \times 1$$

$$\Rightarrow Z^8 - 2^8 = 0$$

$$\Rightarrow Z = 2, 2\alpha, 2\alpha^2, 2\alpha^3, \dots, 2\alpha^7; \alpha = e^{i\frac{2\pi}{8}}$$

$$\Rightarrow Z^8 - 2^8 = (Z - 2) (Z - 2\alpha) (Z - 2\alpha^2) (Z - 2\alpha^3) \dots (Z - 2\alpha^7)$$

$$\Rightarrow |Z^8 - 2^8| = |Z - 2||Z - 2\alpha| \dots |Z - 2\alpha^7|$$

लेकिन  $|Z^8 + (-2^8)| \leq |Z|^8 + 2^8$

$$\Rightarrow |Z - 2||Z - 2\alpha| \dots |Z - 2\alpha^7| \leq |Z|^8 + 2^8$$

$$\leq 2^8 + 2^8$$

$$\leq 2^9$$

$$\Rightarrow \text{Max}(PA_1.PA_2 \dots PA_8) = 2^9$$

**Q.12** मान लीजिए  $R = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 3 & b \\ c & 2 & d \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \{0, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} \right\}$ . तो R में व्युत्क्रमणिय आव्यूहों की संख्या है-

**Ans.** [3780]

**Sol.**  $|R| = -5 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(निम्न स्थितियों में  $|R|$  शून्य हो सकता है)

(i) a, b, c, d में से दो शून्य जो (a व b), (b व d), (d व c) अथवा (c व a) हो सकते हैं।

$$\rightarrow 4 \times 7^2 \text{ तरीके} = 196$$

(ii) (a, b, c, d में से तीन शून्य)

$$\rightarrow {}^4C_3 \times 7 = 28$$

(iii) (a, b, c, d में से चार शून्य)

$$\rightarrow 1$$

(iv) a, b, c, d में से सभी चार अशून्य लेकिन समान संख्या है।

$$\rightarrow 7$$

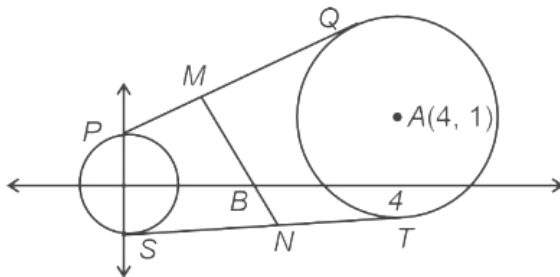
(v) (सब दो एक जैसे और अन्य दो एक जैसे हो (अशून्य)  $\rightarrow 7C_2 \times 2 \times 2 = 84$

$$\text{व्युत्क्रमणिय आव्यूहों की संख्या} = 8^4 - 196 - 28 - 1 - 7 - 84 = 3780$$

**Q.13** मान लीजिए  $C_1$  मूल बिन्दु वाले केन्द्र व त्रिज्या 1 का वृत्त है। मान लीजिए  $C_2$  बिन्दु A (4,1) पर केन्द्र के साथ त्रिज्या r का वृत्त है। जहाँ  $1 < r < 3$ .  $C_1$  और  $C_2$  की दो भिन्न अभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ PQ और ST खींची गईं। स्पर्श रेखा PQ,  $C_1$  को P पर और  $C_2$  को Q पर स्पर्श करती है। स्पर्श रेखा ST,  $C_1$  को S पर और  $C_2$  को T पर स्पर्श करती है। रेखाखण्ड PQ और ST के मध्य बिन्दु को एक रेखा से मिलाया जाता है जो कि बिन्दु B पर x-अक्ष से मिलती है। यदि  $AB = \sqrt{5}$  हो तो  $r^2$  का मान है-

**Ans.** [2]

**Sol.**



माना कि M व N क्रमशः PQ तथा ST के मध्य बिन्दु है।

$\Rightarrow$  (MN दो वृत्तों का एक मूल अक्ष है)

$$C_1 : x^2 + y^2 = 1$$

... (i)

$$C_2 : (x - 4)^2 + (y - 1)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 2y + 17 - r^2 = 0 \quad \dots (ii)$$

(i) व (ii) से

$$(MN \text{ का समी) : } 8x + 2y - 18 + r^2 = 0$$

$$\Rightarrow x\text{-अक्ष पर } B \Rightarrow B \left( \frac{18-r^2}{8}, 0 \right)$$

$$AB = \sqrt{5}$$

$$\sqrt{\left( \frac{18-r^2}{8} - 4 \right)^2} + 1 = \sqrt{5} \quad (\text{दूरी सूत्र द्वारा } a)$$

$$\Rightarrow \text{हल करने पर } r^2 = 2$$

### SECTION – 4 (Maximum Marks: 12)

- This section contains **TWO (02)** paragraphs.
- Based on each paragraph, there are TWO (02) questions.
- The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- If the numerical value has more than two decimal places, **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal places.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :
 

Full Marks	: +3	f <b>ONLY</b> the correct numerical value is entered in the designated place;
Zero Marks	: 0	In all other cases.

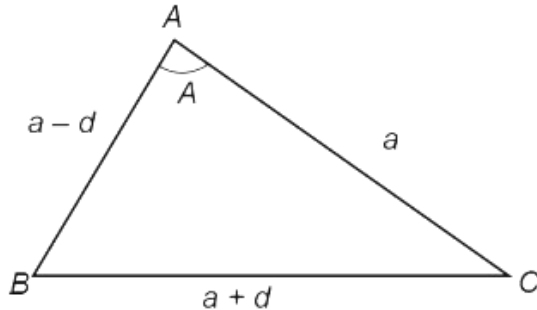
#### अनुच्छेद "I" (Q.14 से Q.15)

एक अधिक कोण वाले त्रिभुज ABC पर विचार करें जिसमें सबसे बड़े और सबसे छोटे कोण के मध्या अन्तर  $\frac{\pi}{2}$  है और जिसकी भुजाएँ समान्तर श्रेणी में हैं। मान लीजिए इस त्रिभुज के शीर्ष त्रिज्या 1 वाले वृत्त पर स्थित है। (अनुच्छेद "I" पर आधारित दो प्रश्न हैं)

**Q.14** मान लीजिए  $a$ ,  $\Delta ABC$  का क्षेत्रफल है तो  $(64a)^2$  का मान है -

**Ans.** [1008]

**Sol.**



मान लीजिए भुजाएँ  $a - d, a, a + d$

$$A - C = \frac{\pi}{2}$$

$$R = 1$$

अब

$$\frac{a+d}{\sin A} = \frac{a}{\sin B} = \frac{a-d}{\sin C} = 2$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{2} + C$$

$$\sin A = \sin \left( \frac{\pi}{2} + C \right)$$

$$\sin A = \cos C.$$

$$\frac{a+d}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 C}$$

$$\left( \frac{a+d}{2} \right)^2 = 1 - \left( \frac{a-d}{2} \right)^2$$

$$\frac{2(a^2 + d^2)}{4} = 1$$

$$a^2 + d^2 = 2 \quad \dots\dots(1)$$

$$\text{अब } \cos B = \frac{(a-d)^2 + (a+d)^2 - a^2}{2(a^2 - d^2)}$$

$$\sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{2(a^2 + d^2) - a^2}{2(a^2 - d^2)}$$

$$\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} = \frac{4 - a^2}{2(a^2 - d^2)} \quad (\because a^2 + d^2 = 2)$$

$$(a^2 - d^2)^2 = 4 - a^2$$

(1) व (2) से

$$a^2 = \frac{7}{4}, d^2 = \frac{1}{4} \quad \dots\dots(2)$$

(त्रिभुज का क्षेत्र.)

$$\Delta = \frac{a(a^2 - d^2)}{4}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2} \times \frac{6}{4 \times 4}$$

$$(64 \alpha)^2 = 1008$$

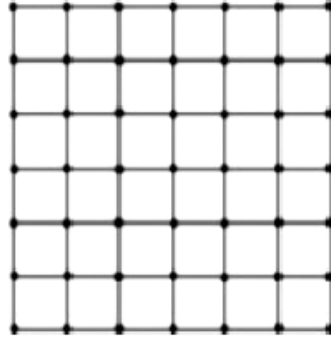
**Q.15** त्रिभुज ABC की अन्तःत्रिज्या है -

**Ans.** [0.25]

**Sol.**  $r = \frac{\Delta}{S} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2} \times \frac{6}{16}}{\frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0.25$

**अनुच्छेद "II" (Q.16 से Q.17)**

आकृति में  $6 \times 6$  वर्ग पर विचार करते हैं। मान लीजिए  $A_1, A_2, \dots, A_{49}$  किसी क्रम में प्रतिच्छेद बिन्दु है। (चित्र में बिन्दु) हम कर सकते हैं कि  $A_i$  तथा  $A_j$  मित्र है। यदि वे एक पंक्ति अथवा एक स्तम्भ के साथ समीपवर्ती है। कल्पना कीजिए कि प्रत्येक बिन्दु  $A_i$  के चुने जाने की समान संभावना है।

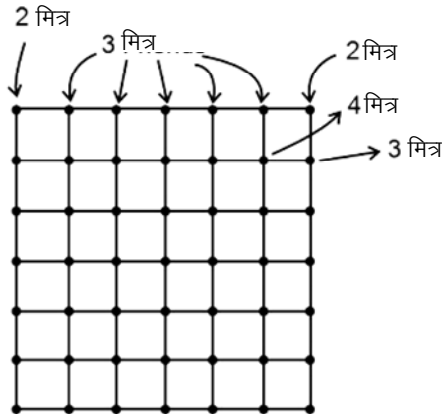


(अनुच्छेद "II" पर आधारित दो प्रश्न हैं)

**Q.16** मान लीजिये कि  $P_i$  प्रायिकता है एक यादृच्छिक रूप से चुने गये बिन्दु के कई मित्र  $i$  है।  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ .  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ , के लिए मान लीजिए  $X$  एक यादृच्छिक चर इस प्रकार है कि प्रा.  $P(X = i) = p_i$  तो  $7E(X)$  का मान है-

**Ans. [24]**

**Sol.**



- $\Rightarrow$  0 मित्र वाले बिन्दुओं की संख्या = 0
- $\Rightarrow$  1 मित्र वाले बिन्दुओं की संख्या = 0
- $\Rightarrow$  2 मित्र वाले बिन्दुओं की संख्या = 4
- $\Rightarrow$  3 मित्र वाले बिन्दुओं की संख्या =  $5 \times 4 = 20$
- $\Rightarrow$  4 मित्र वाले बिन्दुओं की संख्या =  $49 - 24 = 25$

$P_i$	0	0	$\frac{4}{49}$	$\frac{20}{49}$	$\frac{25}{49}$
$X_i$	0	1	2	3	4

$$7(E(X)) = 7 \left( 0 + 0 + \frac{4}{49} \times 2 + \frac{20}{49} \times 3 + \frac{25}{49} \times 4 \right)$$

$$= \left( \frac{100 + 60 + 8}{49} \right)$$

$$= 24$$

**Q.17** बिन्दुओं  $A_1, A_2, \dots, A_{49}$  में से दो अलग अलग बिन्दुओं को यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। मान लीजिये  $P$  प्रायिकता है कि वे मित्र हैं तो  $7P$  का मान है –

**Ans.** [0.50]

**Sol.** पंक्ति में 2 आसन्न बिन्दुओं को चुनने के तरीकों की संख्या = 6

इसी प्रकार स्तम्भ में 2 आसन्न बिन्दुओं को चुनने के तरीकों की संख्या = 6

$\therefore$  आव्युह से दो आसन्न बिन्दुओं को चुनने के तरीकों की संख्या =  $6 \times 7 + 6 \times 7 = 84$

$$\therefore P = \frac{84}{{}^{49}C_2} = \frac{84 \times 2}{49 \times 48}$$

$$7P = \frac{7 \times 84 \times 2}{49 \times 48} = \frac{1}{2}$$

0.50 उत्तर