

JEE Advanced Exam 2023 (Paper & Solution)

Date : 04 / 06 / 2023

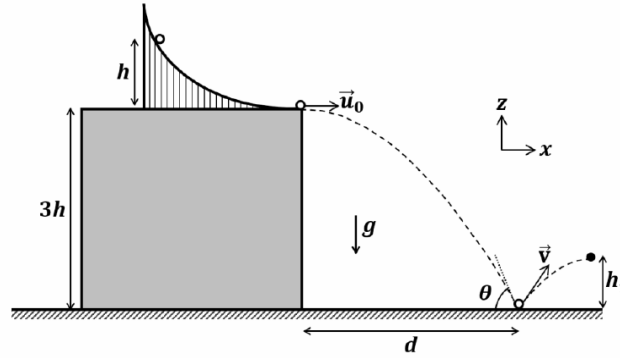
PAPER-1

PHYSICS

SECTION – 1 (Maximum Marks: 12)

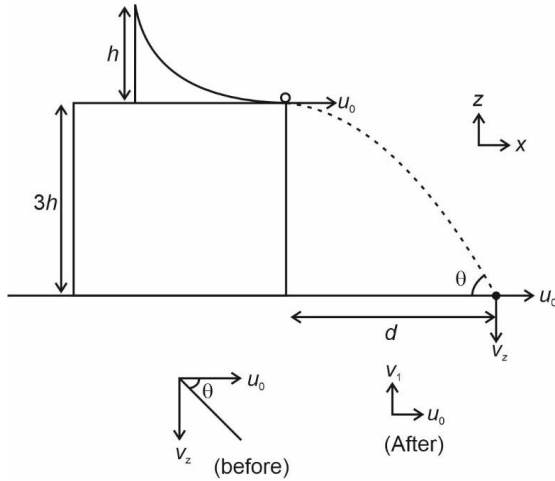
- This section contains **THREE (03)** questions.
- Each question has **FOUR** options (A), (B), (C) and (D). **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is(are) correct answer(s).
- For each question, **choose the option(s)** corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:
 - Full Marks : +4 **ONLY** if (all) the correct option(s) is(are) chosen;
 - Partial Marks : +3 If all the four options are correct but **ONLY** three options are chosen;
 - Partial Marks : +2 If three or more options are correct but **ONLY** two options are chosen, both of which are correct;
 - Partial Marks : +1 If two or more options are correct but **ONLY** one option is chosen and it is a correct option;
 - Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
 - Negative Marks : -2 In all other cases.
- For example, in a question, if (A), (B) and (D) are the **ONLY** three options corresponding to correct answers, then
 - choosing **ONLY** (A), (B) and (D) will get +4 marks;
 - choosing **ONLY** (A) and (B) will get +2 marks;
 - choosing **ONLY** (A) and (D) will get +2 marks;
 - choosing **ONLY** (B) and (D) will get +2 marks;
 - choosing **ONLY** (A) will get +1 mark;
 - choosing **ONLY** (B) will get +1 mark;
 - choosing **ONLY** (D) will get +1 mark;
 - choosing no option (i.e. the question is unanswered) will get 0 marks; and
 - choosing any other combination of options will get -2 marks.

- Q.1** एक स्लाइड एक घर्षणहीन वक्रिय सतह सहित है यह इसके निचले सिरे पर क्षैतिज हो जाती है यह स्लाइड $3h$ ऊँचाई (जमीन से) की बिल्डींग पर फिक्स है चित्र में दर्शाये अनुसार। एक गोलीय गेंद का द्रव्यमान m है इसे स्लाइड पर, बिल्डींग की छत से h ऊँचाई से विराम से छोड़ा जाता है। गेंद स्लाइड को $\vec{u}_0 = u_0 \hat{x}$ के एक वेग के साथ स्लाइड को छोड़ती है तथा यह जमीन पर बिल्डींग से एक d दूरी तथा क्षैतिज के साथ θ कोण बनाते हुये गिरती है यह एक \vec{v} वेग के साथ बाँउस करती है तथा h_1 की एक अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचती है गुरुत्वीय त्वरण g है तथा जमीन का प्रत्यावस्थान गुणांक $1/\sqrt{3}$ है तो निम्न में से कौनसा/से कथन सही हैं ?



- (A) $\vec{u}_0 = \sqrt{2gh} \hat{x}$ (B) $\vec{v} = \sqrt{2gh} (\hat{x} - \hat{z})$ (C) $\theta = 60^\circ$ (D) $d/h_1 = 2\sqrt{3}$

Ans. [A,C,D]
Sol.



$$u_0 = \sqrt{2gh}$$

$$v_z = \sqrt{2g(3h)}$$

$$\tan \theta = \frac{v_z}{u_0} = \sqrt{3}$$

$$\theta = 60^\circ$$

$$d = u_0 T = u_0 \sqrt{2 \left(\frac{3h}{g} \right)} = \sqrt{(2gh)} \sqrt{(2) \left(\frac{3h}{g} \right)}$$

टक्कर के पश्चात् वेग, केवल z-दिशा के अनुदिश वेग परिवर्तित होता है।

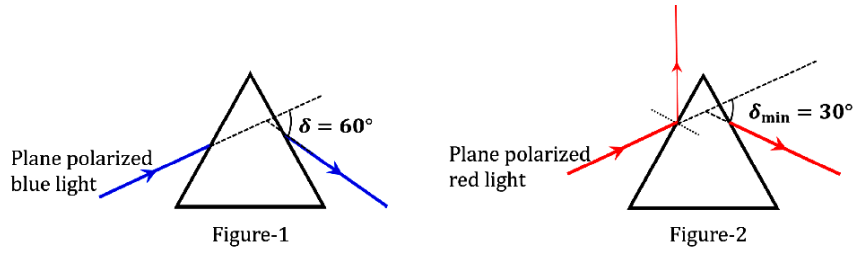
$$v_1 = ev_z = \sqrt{2gh}$$

$$\vec{v} = v_1 \hat{k} + u_0 \hat{i} = \sqrt{2gh} [\hat{i} + \hat{k}]$$

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = h$$

अंतिम रूप से, $u_0 = \sqrt{2gh}$, $\theta = 60^\circ$, $\frac{d}{h} = 2\sqrt{3}$

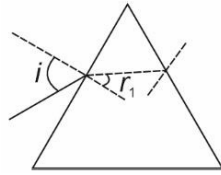
Q.2 एक समतल ध्रुवित नीली प्रकाश किरण एक प्रिज्म दर इस प्रकार आपतित होती है कि प्रिज्म की दूसरी ओर से कोई परावर्तन नहीं होता निर्गत किरण का विचलन कोण $\delta = 60^\circ$ (चित्र-1 देखें) है समान प्रिज्म से लाल प्रकाश के लिये न्यूनतम विचलन $\delta_{\min} = 30^\circ$ (चित्र-2 देखें) है समान प्रिज्म के पदार्थ का अपवर्तनांक $\sqrt{3}$ है। तब निम्न में से कौनसा/से कथन सही है?



- (A) नीला प्रकाश, आपतन तल में ध्रुवित हो जाता है
- (B) प्रिज्म कोण 45° है
- (C) लाल प्रकाश के लिये प्रिज्म के पदार्थ का अपवर्तनांक $\sqrt{2}$ है
- (D) प्रिज्म के निर्गत तल में वायु में नीले प्रकाश के लिये अपवर्तन कोण 60° है

Ans. [A,C,D]

Sol. परावर्तन नहीं होने के लिए



$$\tan i = \sqrt{3}$$

$$i = 60$$

$$\frac{\sin i}{\sin r_1} = \sqrt{3}, r_1 = 30^\circ$$

$$\delta = i + e - r_1 - r_2 = 60^\circ$$

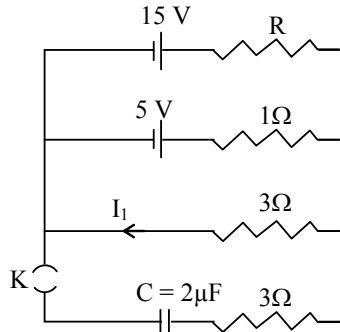
$$\boxed{e = 60^\circ} \quad r_2 = 30^\circ$$

$$\boxed{A = 60^\circ}$$

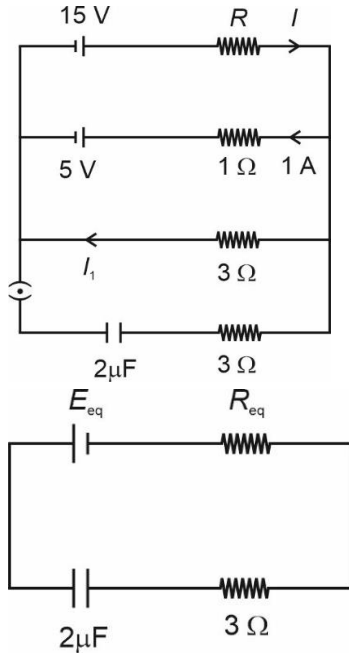
लाल प्रकाश के लिये,

$$\mu = \frac{\sin\left(\frac{A + \delta_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} = \sqrt{2}$$

Q.3 नीचे दर्शाये परिपथ चित्र में संधारित्र C आरम्भिक रूप से अनावेशित है तथा कुंजी K खुली (open) है इस स्थिति में 1 A ऐम्पि. की एक धारा 1Ω के प्रतिरोध से होकर प्रवाहित होती है। $t = t_0$ समय पर कुंजी बंद की जाती है। निम्न में से कौनसा/से कथन सही हैं ? [दिया है : $e^{-1} = 0.36$]



- (A) प्रतिरोध R का मान 3Ω है
- (B) $t < t_0$ पर, I_1 धारा का मान 2 A है
- (C) $t = t_0 + 7.2 \mu s$ पर संधारित्र में धारा 0.6 A है
- (D) $t \rightarrow \infty$ के लिये, संधारित्र पर आवेश $12 \mu C$ है

Ans. [A,B,C,D]
Sol.


$$15 - IR = 6$$

$$I_1[3] = 6$$

$$I_1 = 2A$$

$$I = I_1 + 1 = 3$$

$$15 - 3R = 6$$

$$\Rightarrow R = 3\Omega$$

तुल्य परिपथ है

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1$$

$$R_{eq} = \frac{3}{5}\Omega$$

$$E_{eq} = 5 + 5 + 0 = 10$$

$$E_{eq} = 10 \times \frac{3}{5} = 6V$$

परिपथ में धारा $\frac{6}{\left(\frac{3}{5} + 3\right)} e^{-t/CR}$

$$= \frac{6.5}{18} e^{-\frac{7.2 \times 10^{-6}}{2 \times 10^{-6} \times 3.6}}$$

$$= \frac{30}{18} \times e^{-1} = \frac{30}{18} \times 0.36 = 0.6A$$

नियत अवस्था स्थिति पर, संधारित्र के सिरों पर वोल्टेज = 6V

$$Q = 6 \times 2 = 12\mu C$$

SECTION – 2 [Maximum Mark : 12]

- This section contains **FOUR (04)** questions.
- Each question has **FOUR** options (A), (B), (C) and (D). **ONLY ONE** of these four options is the correct answer.
- For each question, choose the option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks	: +3	If ONLY the correct option is chosen.
Zero Marks	: 0	If none of the option is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks	: -1	In all other cases.

Q.4 एक छड़ का द्रव्यमान $M = 1.00 \text{ kg}$ व लम्बाई $L = 0.20 \text{ m}$ है यह एक क्षैतिज घर्षणहीन सतह पर रखी है इसका एक सिरा एक बिन्दु पर कीलकित है जिसके पारितः यह घूर्णन कर सकता है एक द्रव्यमान $m = 0.10 \text{ kg}$ समान क्षैतिज सतह पर 5.00 m s^{-1} की चाल के साथ, छड़ के लम्बवत् रहते हुये गति कर रहा है। यह छड़ पर कीलकन बिन्दु से $L/2$ की दूरी पर छड़ से टकराता है व v चाल के साथ समान पथ पर वापस लौटता है। इस प्रत्यास्थ टक्कर के पश्चात्, छड़ ω कोणीय वेग के साथ घूर्णन करती है। निम्न में से कौनसा कथन सही है ?

- (A) $\omega = 6.98 \text{ rad s}^{-1}$ तथा $v = 4.30 \text{ m s}^{-1}$ (B) $\omega = 3.75 \text{ rad s}^{-1}$ तथा $v = 4.30 \text{ m s}^{-1}$
 (C) $\omega = 3.75 \text{ rad s}^{-1}$ तथा $v = 10.0 \text{ m s}^{-1}$ (D) $\omega = 6.80 \text{ rad s}^{-1}$ तथा $v = 4.10 \text{ m s}^{-1}$

Ans. [A]

Sol. बिन्दु O के परितः कोणीय संवेग के संरक्षण से



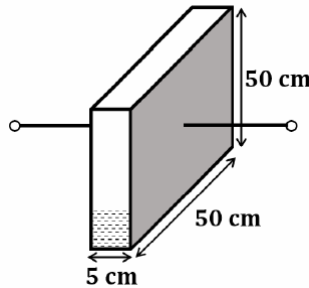
$$mv_0 \frac{L}{2} = \frac{ML^2}{3} \omega - \frac{mvL}{2} \dots (i)$$

$$e = 1$$

$$\Rightarrow v_0 = v + \frac{L\omega}{2} \dots (ii)$$

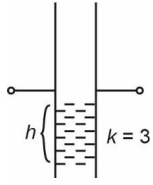
समी. (i) व (ii) को हल करने पर
 $m = 0.1 \text{ kg}$, $M = 1 \text{ kg}$, $L = 0.20 \text{ m}$
 $v_0 = 5 \text{ m/s}$
 समी. (i) व (ii) को हल करने पर
 हम पाते, $\omega = 6.98 \text{ rad/s}$
 और $v = 4.3 \text{ m/s}$

Q.5 एक पात्र को पेंदा $50 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ व ऊँचाई 50 cm है चित्र में दर्शाये अनुसार। यह दो समांतर विद्युतीय रूप से चालक दीवारों से बने प्रत्येक दीवार का क्षेत्रफल $50 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$ है। पात्र की अन्य दीवारें, पतली व अचालक हैं। पात्र को परावैद्युतांक 3 के एक द्रव से $250 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ की दर से भरा जा रहा है। 10 sec पश्चात् पात्र की धारिता का मान क्या है ? [दिया है, मुक्त क्षेत्र की विद्युत शीलता $\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$, पात्र की कुचालक दीवारों का धारिता पर प्रभाव नगण्य है]

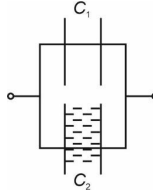


- (A) 27 pF (B) 63 pF (C) 81 pF (D) 135 pF

Ans. [B]
Sol.



$$h = \frac{250 \times 10}{50 \times 5} = 10 \text{ cm}$$



$$C_1 = \frac{(0.40 \times 0.50) \times 9 \times 10^{-12}}{5 \times 10^{-2}} = 0.36 \times 10^{-10} \text{ F}$$

$$C_2 = \frac{3 \times 0.10 \times 0.5 \times 9 \times 10^{-12}}{5 \times 10^{-2}}$$

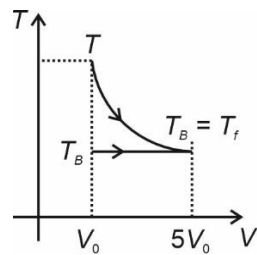
$$C_2 = 0.27 \times 10^{-10} \text{ F}$$

$$C = C_1 + C_2 = 63 \text{ pF}$$

Q.6 एक आदर्श गैस का एक मोल आरम्भिक अवस्था (T_A, V_0) से अंतिम अवस्था ($T_f, 5V_0$) तक रूद्धोष्मीय रूप से प्रसारित होती है समान गैस के अन्य मोल आरम्भिक अवस्था (T_B, V_0) से समान अंतिम अवस्था ($T_f, 5V_0$) तक समतापीय रूप से प्रसारित होती है। इस आदर्श गैस के लिये नियत दाब व नियत आयतन पर विशिष्ट ऊष्माओं का अनुपात γ है। T_A/T_B का अनुपात क्या है ?

- (A) $5^{\gamma-1}$ (B) $5^{1-\gamma}$ (C) 5^γ (D) $5^{1+\gamma}$

Ans. [A]
Sol.



रूद्धोष्मीय प्रक्रम के लिये

$$TV^{\gamma-1} = C$$

$$\Rightarrow T_A V_0^{\gamma-1} = T_f (5V_0)^{\gamma-1} \dots (i)$$

समतापीय प्रक्रम के लिये

$$T_B = T_f \dots (ii)$$

समी. (i) \div समी. (ii)

$$\Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = 5^{\gamma-1}$$

Q.7 दो उपग्रह P व Q पृथ्वी (त्रिज्या R) के चारों ओर, भिन्न वृत्तीय कक्षाओं में चक्कर लगा रहे हैं P व Q की पृथ्वी सतह से ऊँचाइयां क्रमशः h_p व h_q है जहाँ $h_p = R/3$ है। गुरुत्वीय त्वरण के कारण P व Q के त्वरण क्रमशः g_p व g_q हैं यदि $g_p/g_q = 36/25$ है तो h_q का मान क्या है ?

- (A) $3R/5$ (B) $R/6$ (C) $6R/5$ (D) $5R/6$

Ans. [A]

Sol. दिया है $h_p = \frac{R}{3}$

$h_Q = ?$

ऊँचाई पर गुरुत्वीय त्वरण

$$g_{ht} = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

$$\frac{g_p}{g_Q} = \frac{36}{25} = \frac{\frac{GM}{(R+h_p)^2}}{\frac{GM}{(R+h_Q)^2}}$$

$h_p = \frac{R}{3}$ रखकर, हल करने पर

$$h_Q = \frac{3R}{5}$$

SECTION – 3 [Maximum Mark : 24]

- This section contains **SIX (06)** questions.
- The answer to each question is a **NON-NEGATIVE INTEGER**.
- For each question, enter the correct integer corresponding to the answer using the mouse and the onscreen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :
Full Marks : +4 If **ONLY** the correct integer is entered;
Negative Marks : 0 In all other cases.

Q.8 एक हाइड्रोजन सदृश्य परमाणु का परमाणु क्रमांक Z है इन परमाणुओं के $n = 4$ से $n = 3$ संक्रमण में उत्सर्जित फोटोन का उपयोग एक लक्ष्य धातु से प्रकाश विद्युत प्रभाव का प्रयोग करने में किया जाता है। उत्सर्जित प्रकाश इलेक्ट्रॉनों की अधिकतम गतिज ऊर्जा 1.95 eV है। यदि धातु लक्ष्य के लिये प्रकाशविद्युत दैहली तरंग दैर्ध्य 310 nm है तो Z का मान _____ है।

[दिया है : $hc = 1240 \text{ eV-nm}$ तथा $Rhc = 13.6 \text{ eV}$, जहाँ R रिडबर्ग नियतांक, h प्लांक नियतांक व c निर्वात में प्रकाश की चाल है]

Ans. [3]

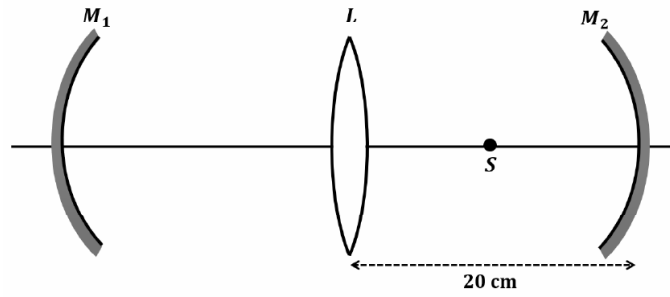
Sol. $\Delta E_{4 \text{ to } 3} = 1.95 \text{ eV} + \frac{1240}{310} \text{ eV}$

$$13.6 Z^2 \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right) = 5.95 \Rightarrow 13.6 Z^2 \frac{7}{9 \times 16} = 5.95$$

$$Z^2 = \frac{5.95 \times 9 \times 16}{13.6}$$

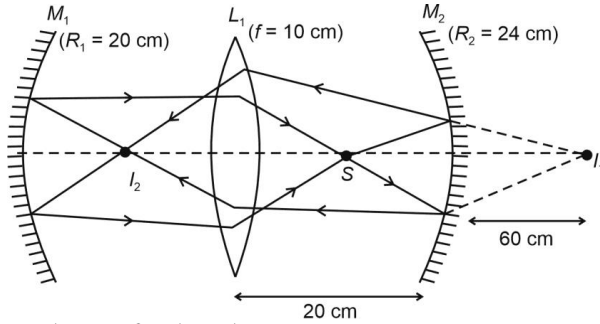
हल करने पर $Z = 3$

Q.9 एक प्रकाशिक व्यवस्था दो अवतल दर्पण M_1 व M_2 उत्तल लेंस L मुख्य अक्ष, उभयनिष्ठ रखते हुये रखती है, दर्शाये चित्रानुसार। L की फोकस लम्बाई 10 cm है। M_1 व M_2 की वक्रता त्रिज्यायें क्रमशः 20 cm व 24 cm है। L व M_2 के मध्य दूरी 20 cm है एक बिन्दु बिंब S , L व M_2 के मध्य अक्ष पर स्थित है। जब L व M_1 के मध्य दूरी $n/7 \text{ cm}$ है इनमें से एक प्रतिबिंब, S के साथ संपातित होता है। n का मान _____ है।



Ans. [80 or 150 or 220]

Sol.



M_2 से परावर्तन के लिये

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{(-10)} = \frac{1}{(-12)}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{10} - \frac{1}{12}$$

$$v = +60 \text{ cm (for } I_1)$$

L से अपवर्तन के लिये

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{(-80)} = \frac{1}{10}$$

$$v = +\frac{80}{7} \text{ (For } I_2)$$

इस प्रतिबिंब को M_1 पर फोकसित होना चाहिये।

$$\therefore \frac{20}{2} + \frac{80}{7} = \frac{n}{7}$$

$$\boxed{n = 150}$$

तथा,

यदि I_2, M_1 के ध्रुव पर बनता है तो

$$\frac{n}{7} = \frac{80}{7}$$

$$\boxed{n = 80}$$

तथा I_2, M_1 के वक्रता केन्द्र पर बनता है तो

$$\frac{n}{7} = \frac{80}{7} + 20$$

$$\therefore \boxed{n = 220}$$

Q.10 एक पतले उत्तल लेंस की फोकस लम्बाई ज्ञात करने के एक प्रयोग में, वस्तु की लेंस से दूरी $10 \pm 0.1 \text{ cm}$ है तथा वस्तु के वास्तविक प्रतिबिम्ब की लेंस से दूरी $20 \pm 0.2 \text{ cm}$ है। लेंस की फोकस लम्बाई के निर्धारण में त्रुटि $n\%$ है तो n का मान _____ है।

Ans. [1]

Sol. वस्तु की दूरी = $10 \pm 0.1 \text{ cm}$
 प्रतिबिम्ब की दूरी = $20 \pm 0.2 \text{ cm}$
 लेंस सूत्र लागू करने पर

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f} \quad \dots (i)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{20} - \frac{1}{(-10)} = \frac{1}{f}$$

$$\Rightarrow f = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

समी. (i) का अवकलन करने पर

$$-\frac{1}{v^2} dv + \frac{1}{u^2} du = \frac{-1}{f^2} df$$

त्रुटि की गणना के लिए

$$\frac{1}{f^2} df = \frac{1}{v^2} dv + \frac{1}{u^2} du$$

$$\left(\frac{df}{f}\right) \times 100 = \left(\frac{0.2}{20^2} + \frac{0.1}{10^2}\right) \frac{20}{3} \times 100$$

$$= \left(\frac{0.2}{4} + \frac{0.1}{1}\right) \frac{20}{3} = 1$$

$$\therefore \frac{df}{f} \times 100 = 1\%$$

Q.11 एक बंद पात्र एक एकल परमाणुक गैस के दो मोल ($\gamma = 5/3$) व एक आदर्श द्विपरपरमाणुक गैस ($\gamma = 7/5$) के एक मोल का समांगी मिश्रण रखता है यहाँ γ , एक आदर्श गैस के नियत दाब व नियत आयतन पर विशिष्ट उष्माओं का अनुपात है। जब नियत दाब पर गर्म किया जाता है गैस मिश्रण 66 Joule कार्य करता है। इसकी आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन _____ जूल है।

Ans. [121]

Sol. $\Delta u = n_1 C_1 \Delta T + n_2 C_2 \Delta T$
 $= (n_1 C_1 + n_2 C_2) \Delta T \quad \dots (i)$

किया गया कार्य = $P \Delta v$
 $= (n_1 + n_2) R \Delta T \quad \dots (ii)$

(i) को (ii) से भाग देने पर

$$\frac{\Delta u}{W} = \frac{(n_1 C_1 + n_2 C_2) \Delta T}{(n_1 + n_2) R \Delta T}$$

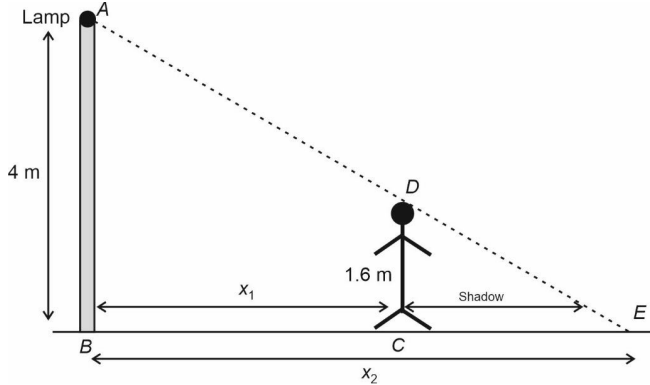
$$\Delta u = \frac{W}{R} \left(\frac{n_1 C_1 + n_2 C_2}{n_1 + n_2} \right)$$

$$= \frac{66}{R} \left[\frac{3R}{2} \times 2 + \frac{5R}{2} \times 1 \right] = 121 \text{ J}$$

Q.12 एक व्यक्ति की ऊँचाई 1.6 m है यह 4 m ऊँचे एक लैम्प पोस्ट से दूर की ओर, जमीन पर एक सीधे पथ के अनुदिश चलकर जा रहा है। लैम्प पोस्ट व व्यक्ति सदैव जमीन के लम्बवत् रहते हैं यदि व्यक्ति की चाल 60 cm s^{-1} है तो जमीन पर व्यक्ति की परछाई की नोक की चाल, व्यक्ति के सापेक्ष _____ cm s^{-1} है।

Ans. [40]

Sol. दिया है $\frac{dx_1}{dt} =$ व्यक्ति की चाल = 60 cm/s



तथा $\frac{dx_2}{dt} =$ व्यक्ति की परछाई की शीर्ष की चाल

$\triangle ABE$ तथा $\triangle DCE$ में समरूप त्रिभुज का नियम लागू करने पर

$$\frac{4}{x_2} = \frac{1.6}{x_2 - x_1}$$

$$4x_2 - 4x_1 = 1.6x_2$$

$$2.4x_2 = 4x_1$$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2.4 \frac{dx_2}{dt} = 4 \frac{dx_1}{dt}$$

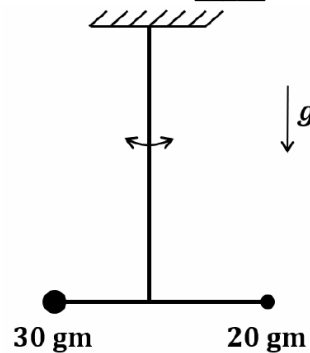
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{4}{2.4} (60) = 100 \text{ cm/s}$$

$$\vec{v}_{SP} = \vec{v}_{SG} - \vec{v}_{PG}$$

$$v_{SP} = 100 \text{ cm s}^{-1} - 60 \text{ cm s}^{-1}$$

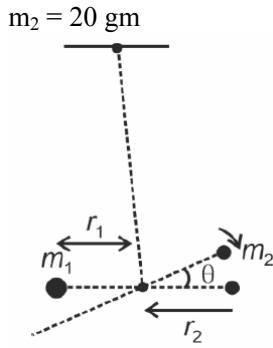
$$= 40 \text{ cm s}^{-1}$$

Q.13 दो बिन्दु सदृश्य पिण्डों के द्रव्यमान 20 gm व 30 gm है यह एक 10 m लम्बी दृढ़, द्रव्यमानहीन दड़ के दोनों सिरों पर संलग्न है यह निकाय एक दृढ़ छत से, एक पतले तार द्वारा उर्ध्व रूप से, इसके द्रव्यमान केंद्र पर निलंबित है, चित्र में दर्शाये अनुसार। परिणामी मरोड़ी पेण्डुलम लघु दोलनों के अधीन है। तार का मरोड़ी गुणांक $1.2 \times 10^{-8} \text{ N m rad}^{-1}$ है। दोलनों की कोणिय आवृत्ति $n \times 10^{-3} \text{ rad s}^{-1}$ है। n का मान _____ है।



Ans. [10]

Sol. $m_1 = 30 \text{ gm}$



घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण है

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

स्पष्टतः $r_1 = 4 \text{ cm}$

तथा $r_2 = 6 \text{ cm}$

$$\therefore I = (30 \times 10^{-3} \times 16 \times 10^{-4}) + (20 \times 10^{-3} \times 36 \times 10^{-4})$$

$$\Rightarrow I = 1200 \times 10^{-7} \text{ kg m}^2$$

यदि निकाय को एक लघु कोण θ से घूर्णन कराया जाता है तो प्रत्यस्थान बल आघूर्ण $\tau_{(R)} = -k\theta$

$$\text{तथा } \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-k}{I} \cdot \theta = -\omega^2\theta = \frac{-1.2 \times 10^{-8}}{1200 \times 10^{-7}} \cdot \theta$$

$$\therefore \omega^2 = 10^{-4}$$

$$\text{अतः, } \omega = \frac{1}{100} \text{ rad/s} \Rightarrow \omega = 10 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$$

SECTION – 4 [Maximum Mark : 24]

- This section contains **FOUR (04)** Matching List Sets.
- Each set has **ONE** Multiple Choice Question.
- Each set has **TWO** lists: List-I and List-II.
- **List-I** has Four entries (P), (Q), (R) and (S) and **List-II** has Five entries (1), (2), (3), (4) and (5).
- **FOUR** options are given in each Multiple Choice Question based on **List-I** and **List-II** and **ONLY ONE** of these four options satisfies the condition asked in the Multiple Choice Question.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks	: +3	ONLY if the option corresponding to the correct combination is chosen;
Zero Marks	: 0	If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks	: -1	In all other cases.

Q.14 सारणी-I, भिन्न रेडियो सक्रिय क्षय प्रक्रम दर्शाती है व सारणी-II सम्भावित उत्सर्जित कण प्रदान करती है, सारणी-I व सारणी-II को सुमेलित करें तथा सही विकल्प चुनें।

	सारणी-I		सारणी-II
(P)	${}_{92}^{238}\text{U} \rightarrow {}_{91}^{234}\text{Pa}$	(1)	एक α कण व एक β^+ कण
(Q)	${}_{82}^{214}\text{Pb} \rightarrow {}_{82}^{210}\text{Pb}$	(2)	तीन β^- कण व एक α कण
(R)	${}_{81}^{210}\text{Tl} \rightarrow {}_{82}^{206}\text{Pb}$	(3)	दो β^- कण व एक α कण
(S)	${}_{91}^{228}\text{Pa} \rightarrow {}_{88}^{224}\text{Ra}$	(4)	एक α कण व एक β^- कण
		(5)	एक α कण व दो β^+ कण

(A) P \rightarrow 4, Q \rightarrow 3, R \rightarrow 2, S \rightarrow 1

(B) P \rightarrow 4, Q \rightarrow 1, R \rightarrow 2, S \rightarrow 5

(C) P \rightarrow 5, Q \rightarrow 3, R \rightarrow 1, S \rightarrow 4

(D) P \rightarrow 5, Q \rightarrow 1, R \rightarrow 3, S \rightarrow 2

Ans. [A]

Sol. विकल्प (A) सही उत्तर है।

- यदि α क्षय में द्रव्यमान संख्या 4 मात्रक द्वारा घट जाती है तथा परमाणु क्रमांक 2 मात्रक द्वारा घट जाता है।
- β^- क्षय में द्रव्यमान संख्या परिवर्तित नहीं होती, लेकिन परमाणु क्रमांक 1 मात्रक द्वारा बढ़ जाता है।
- β^+ क्षय में द्रव्यमान संख्या परिवर्तित नहीं होती लेकिन परमाणु क्रमांक 1 मात्रक द्वारा घट जाता है।

Q.15 सारणी-I में दिये गये कृष्णिका पिण्ड के ताप को सारणी-II में दिये गये उपयुक्त कथनों से सुमेल कीजिये व इनमें से सही विकल्प चुनें

[दिया है : वीन नियतांक 2.9×10^{-3} m-K तथा $\frac{hc}{e} = 1.24 \times 10^{-6}$ V-m]

	सारणी-I		सारणी-II
(P)	2000 K	(1)	शिखर तरंगदैर्घ्य पर विकिरण, 4 eV कार्यफल की धातु से प्रकाश इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन करा सकते हैं।
(Q)	3000 K	(2)	शिखर तरंगदैर्घ्य पर विकिरण, मानवीय नेत्रों के लिये दृश्य है।
(R)	5000 K	(3)	शिखर तरंगदैर्घ्य पर विकिरण, एक स्लिट विवर्तन में परिणाम स्वरूप सर्वाधिक चौड़ाई का केंद्रीय उच्चिष्ठ उत्पन्न करता है।
(S)	10000 K	(4)	प्रति एकांक क्षेत्रफल द्वारा उत्सर्जित शक्ति, 6000 K ताप पर एक कृष्णिका वस्तु द्वारा एकांक क्षेत्रफल द्वारा उत्सर्जित शक्ति से अनुपात 1/16 है।
		(5)	शिखर तरंगदैर्घ्य पर उत्सर्जित विकिरण को मानवीय हड्डियों का प्रतिबिम्ब प्राप्त करने के लिये उपयोग किया जा सकता है।

(A) P \rightarrow 3, Q \rightarrow 5, R \rightarrow 2, S \rightarrow 3

(B) P \rightarrow 3, Q \rightarrow 2, R \rightarrow 4, S \rightarrow 1

(C) P \rightarrow 3, Q \rightarrow 4, R \rightarrow 2, S \rightarrow 1

(D) P \rightarrow 1, Q \rightarrow 2, R \rightarrow 5, S \rightarrow 3

Ans. [C]

Sol. (P) 2000 K

$$\lambda_m T = b$$

$$\lambda_m = \frac{b}{T} = \frac{2.9 \times 10^{-3}}{2000} = 1.45 \times 10^{-6} \text{ m} = 1450 \text{ nm}$$

(Q) 3000 K

$$\lambda_m T = b \Rightarrow \lambda_m = \frac{2.9 \times 10^{-3}}{3000} = 966.66 \text{ nm}$$

(R) 5000 K

$$\lambda_m T = b \Rightarrow \lambda_m = \frac{2.9 \times 10^{-3}}{5000} = 580 \text{ nm}$$

(S) 10000 K

$$\lambda_m T = b \Rightarrow \lambda_m = \frac{2.9 \times 10^{-3}}{10000} = 290 \text{ nm}$$

सारणी-II

$$(1) \lambda_{th} = \frac{hc}{\phi} = \frac{1.24 \times 10^{-6}}{4} = 0.31 \times 10^{-6} \text{ m} = 310 \text{ nm}$$

$$\text{As, } \lambda \leq \lambda_{th}$$

$$\boxed{S \rightarrow 1}$$

$$(2) 400 < \lambda < 700 \text{ nm}$$

$$\boxed{R \rightarrow 2}$$

(3) केन्द्रीय उच्चिष्ठ, अधिकतम तरंगदैर्घ्य के लिये सर्वाधिक चौड़ा होता है।

$$\Rightarrow \boxed{P \rightarrow 3}$$

$$(4) \sigma A(T_1)^4 = \frac{1}{16} \sigma A T_2^4 \Rightarrow T_1 = \frac{1}{2} T_2 = 3000 \text{ K} \quad \boxed{Q \rightarrow 4}$$

(5) हड्डियों की इमेंजिंग के लिये X-किरणों (1–10 nm) का उपयोग किया जाता है।

सारणी-II में कोई विकल्प नहीं है।

Q.16 एक श्रेणी LCR परिपथ $45 \sin(\omega t)$ Volt स्रोत से संयोजित है। परिपथ की अनुनादी कोणिय आवृत्ति 10^5 rad s^{-1} है व अनुनाद पर धारा आयाम I_0 है जब स्रोत की कोणिय आवृत्ति $\omega = 8 \times 10^4 \text{ rad s}^{-1}$ है परिपथ में धारा आयाम $0.05 I_0$ है। यदि $L = 50 \text{ mH}$ तो सारणी-I व सारणी-II को सुमेल करें व सही विकल्प चुने।

	सारणी-I		सारणी-II
(P)	$I_0, \text{ mA}$ में	(1)	44.4
(Q)	परिपथ का विशेषता गुणांक	(2)	18
(R)	परिपथ की बैंड चौड़ाई rad s^{-1} में	(3)	400
(S)	अनुनाद पर शिखर शक्ति व्यय, वाट में	(4)	2250
		(5)	500

(A) P \rightarrow 2, Q \rightarrow 3, R \rightarrow 5, S \rightarrow 1

(B) P \rightarrow 3, Q \rightarrow 1, R \rightarrow 4, S \rightarrow 2

(C) P \rightarrow 4, Q \rightarrow 5, R \rightarrow 3, S \rightarrow 1

(D) P \rightarrow 4, Q \rightarrow 2, R \rightarrow 1, S \rightarrow 5

Ans.

[B]

Sol.

दी गई जानकारी के अनुसार :

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^5 \quad \dots \text{(i)}$$

$$I_0 = \frac{45}{R} \quad \dots \text{(ii)}$$

$$0.05I_0 = \frac{45}{\sqrt{R^2 + \left(0.8X_{L_0} - \frac{5}{4}X_{C_0}\right)^2}}$$

जहाँ $X_{L_0} = X_{C_0}$ अनुनादी आवृत्तियों पर है

$$\text{हल करने पर } g, R = \frac{450\Omega}{4} \Rightarrow I_0 = 400 \text{ mA}$$

$$\text{विशेषता गुणांक } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 44.44$$

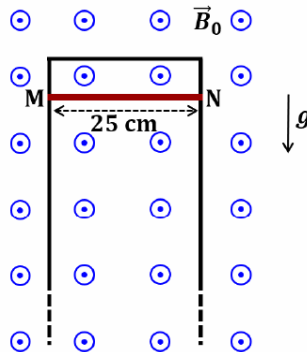
$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \Rightarrow \Delta\omega = 2250 \text{ rad/s}$$

$$\text{शिखर शक्ति} = 45 \times \frac{400}{10000} \text{ W} = 18$$

\Rightarrow विकल्प (B) सही मिलान है।

Q.17 एक पतली चालक छड़ MN का द्रव्यमान 20 gm , लम्बाई 25 cm व प्रतिरोध 10Ω है यह घर्षणहीन लम्बी, पूर्णत चालक उर्ध्व पटरियों पर बनी हुई है चित्र में दर्शाये अनुसार। एक समरूप चुम्बकीय क्षेत्र $B_0 = 4 \text{ T}$, छड़ व पटरियों व्यवस्था के लम्बवत् निर्देशित है। छड़ को $t = 0$ पर विराम से छोड़ा जाता है तथा यह पटरियों के अनुदिश नीचे की ओर गति करती है। मानाकि वायु प्रतिरोध नगण्य है। सारणी-I व सारणी-II को सुमेल करें व सही विकल्प चुनें।

[दिया गया है : g पर गुरुत्वीय त्वरण $= 10 \text{ m s}^{-2}$ और $e^{-1} = 0.4$]



	सारणी-I		सारणी-II
(P)	$t = 0.2$ s पर, प्रेरित वि.वा.बल का परिमाण, वोल्ट में	(1)	0.07
(Q)	$t = 0.2$ s पर, चुम्बकीय बल का परिमाण, न्यूटन में	(2)	0.14
(R)	$t = 0.2$ s पर, ऊष्मा के रूप में शक्ति व्यय, वॉट में,	(3)	1.20
(S)	छड़ का अंतिम वेग का परिमाण $m s^{-1}$ में	(4)	0.12
		(5)	2.00

(A) $P \rightarrow 5, Q \rightarrow 2, R \rightarrow 3, S \rightarrow 1$

(B) $P \rightarrow 3, Q \rightarrow 1, R \rightarrow 4, S \rightarrow 5$

(C) $P \rightarrow 4, Q \rightarrow 3, R \rightarrow 1, S \rightarrow 2$

(D) $P \rightarrow 3, Q \rightarrow 4, R \rightarrow 2, S \rightarrow 5$

Ans.

[D]

Sol.

प्रेरित वि.बल. बल $\varepsilon = B\ell v$

$$\Rightarrow \text{प्रेरित धारा } i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B\ell v}{R}$$

$$\Rightarrow mg - i\ell B = ma \quad [\text{द्वितीय नियम लागू करने}]$$

$$\Rightarrow mg - \frac{B^2 \ell^2 v}{R} = m \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{mg - \frac{B^2 \ell^2 v}{R}} = \frac{dt}{m} \Rightarrow \frac{\ln \left[mg - \frac{B^2 \ell^2 v}{R} \right]_0^v}{-\frac{B^2 \ell^2}{R}} = \frac{t}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{mg - \frac{B^2 \ell^2 v}{R}}{mg} = e^{-\frac{B^2 \ell^2}{mR} t}$$

$$\Rightarrow v = 2[1 - e^{-5t}]$$

$$\Rightarrow \text{At } t = 0.2 \text{ s, } v = 2 \left[1 - \frac{1}{e} \right]$$

$$\Rightarrow \varepsilon = B\ell \times 2 \left[1 - \frac{1}{e} \right] = 1.2 \text{ volts}$$

तथा चुम्बकीय बल $= i\ell B = 0.12 \text{ N}$

तथा व्ययित शक्ति $= 0.144 \text{ W}$

तथा अन्तिम वेग $= 2 \text{ m/s}$

\Rightarrow विकल्प (D) सही मिलना सही है

CHEMISTRY

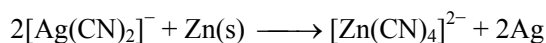
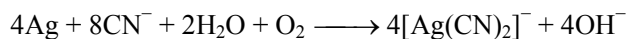
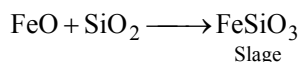
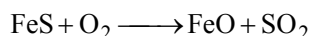
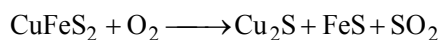
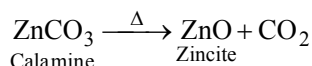
SECTION – 1 (Maximum marks : 12)

- This section contains **THREE (03)** questions.
- Each question has **FOUR** options (A), (B), (C) and (D). **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is(are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:
 - Full Marks* : +4 **ONLY** if (all) the correct option(s) is(are) chosen;
 - Partial Marks* : +3 If all the four options are correct but **ONLY** three options are chosen;
 - Partial Marks* : +2 If three or more options are correct but **ONLY** two options are chosen, both of which are correct;
 - Partial Marks* : +1 If two or more options are correct but **ONLY** one option is chosen and it is a correct option;
 - Zero Marks* : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
 - Negative Marks* : -2 In all other cases.
- For example, in a question, if (A), (B) and (D) are the **ONLY** three options corresponding to correct answers, then
 - choosing **ONLY** (A), (B) and (D) will get +4 marks;
 - choosing **ONLY** (A) and (B) will get +2 marks;
 - choosing **ONLY** (A) and (D) will get +2 marks;
 - choosing **ONLY** (B) and (D) will get +2 marks;
 - choosing **ONLY** (A) will get +1 mark;
 - choosing **ONLY** (B) will get +1 mark;
 - choosing **ONLY** (D) will get +1 mark;
 - choosing no option (i.e. the question is unanswered) will get 0 marks; and
 - choosing any other combination of options will get -2 marks.

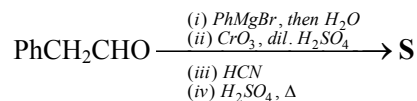
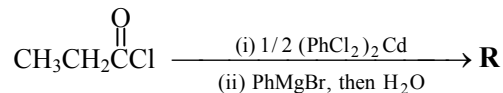
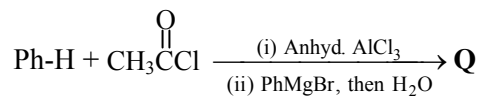
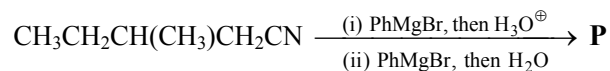
- Q.1** धातुओं के निष्कर्षण में शामिल प्रक्रियाओं से संबंधित सही कथन है।
- (A) मैलाकाइट के भर्जन से क्यूप्राइट बनता है।
- (B) कैलामाइन के निस्तापन से जिंकसाइट बनता है।
- (C) आयरन को हटाने के लिए परावर्तनी भट्टी में कॉपर पायराइट्स को सिलिका के साथ गर्म किया जाता है
- (D) अशुद्ध चांदी को आक्सीजन की उपस्थिति में जलीय KOH के साथ क्रिया कराते है। और उसके बाद जिंक धातु के साथ अपचयन किया जाता है।

Ans. [B, C, D]

Sol. $\text{Cu}(\text{OH})_2 \cdot \text{CuCO}_3 \rightarrow \text{CuO} + \text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2$



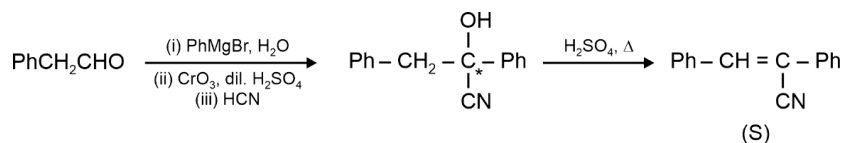
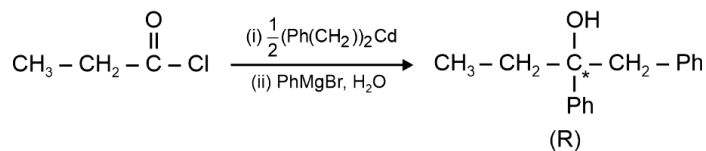
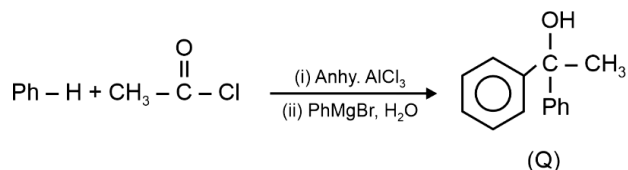
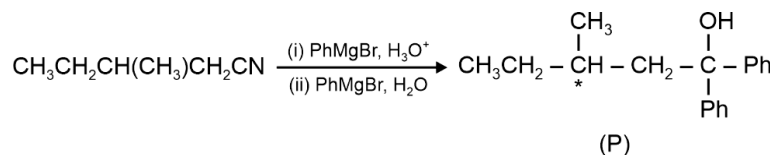
Q.2 निम्नलिखित अभिक्रिया में, **P**, **Q**, **R**, तथा **S** मुख्य उत्पाद है।



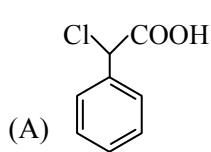
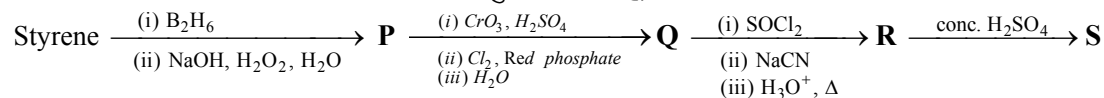
P, **Q**, **R**, तथा **S** में सही कथन है।

- (A) **P** तथा **Q** दोनों में असम्वित कार्बन है
 (B) **Q** तथा **R** दोनों में असम्वित कार्बन है
 (C) **P** तथा **R** दोनों में असम्वित कार्बन है
 (D) **P** में असम्वित कार्बन है, **S** में कोई असम्वित कार्बन नहीं है।

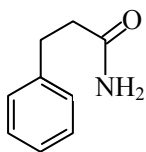
Ans.
Sol.



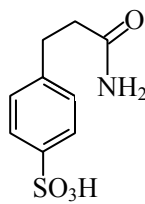
Q.3 निम्न अभिक्रिया स्थिति पर विचार कीजिए तथा मुख्य उत्पाद **Q**, **R** तथा **S** के लिए सही विकल्प का चयन करें



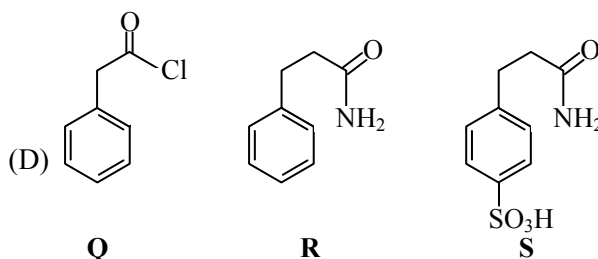
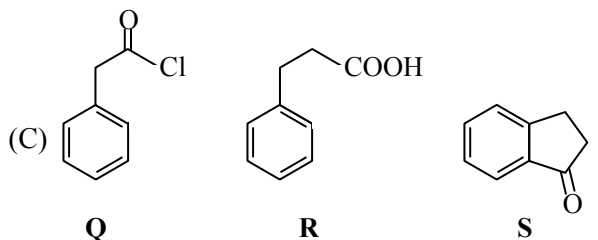
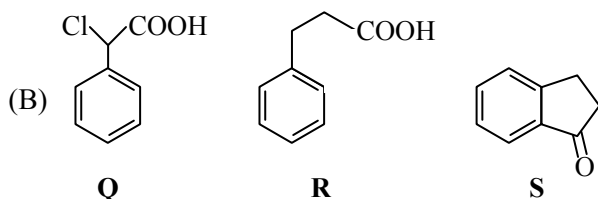
Q



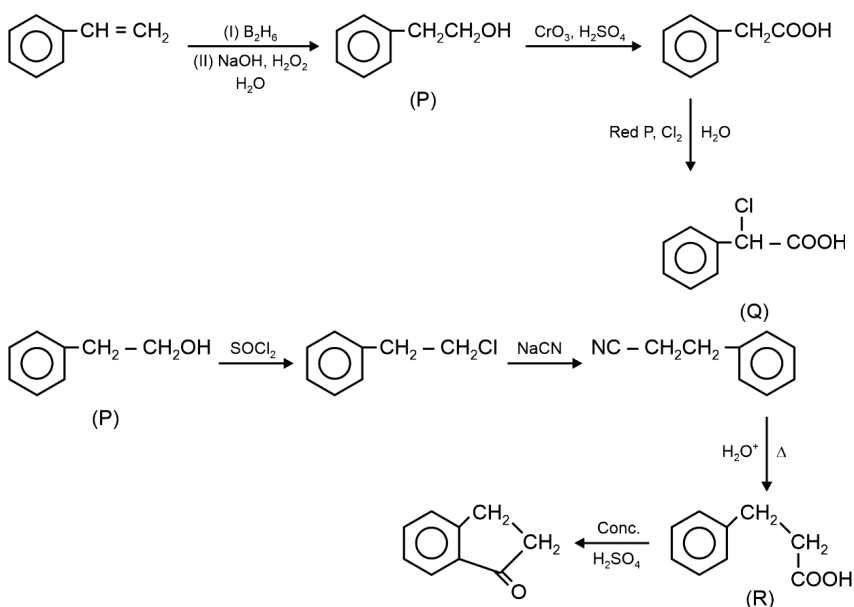
R



S



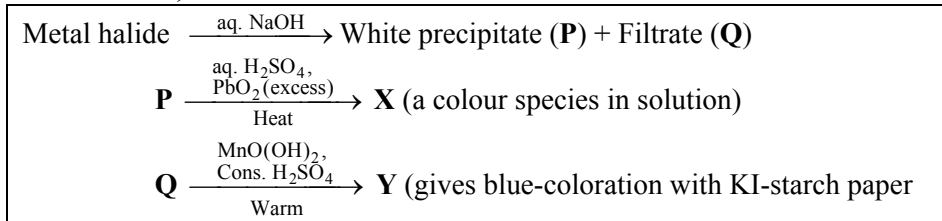
Ans. [B]
Sol.



SECTION – 2 (Maximum Marks : 12)

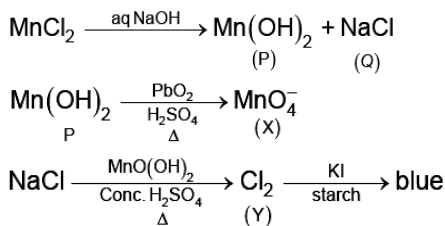
- This section contains **FOUR (04)** questions.
- Each question has **FOUR** options (A), (B), (C) and (D). **ONLY ONE** of these four options is the correct answer.
- For each question, choose the option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:
Full Marks : +3 If **ONLY** the correct option is chosen;
Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks : -1 In all other cases.

Q.4 नीचे दी गयी स्थिति में, **X** तथा **Y** क्रमशः है।



- (A) CrO_4^{2-} and Br_2 (B) MnO_4^{2-} and Cl_2 (C) MnO_4^- and Cl_2 (D) MnSO_4 and HOCl

Ans. [C]
Sol.



Q.5 एक मोनोबेसिक दुर्बल अम्ल (HX) के जलीय विलयन के लिए $c\Lambda_m$ के सापेक्ष $1/\Lambda_m$ ग्राफ पर P के y अक्ष अन्तः खण्ड और S की ढाल के साथ एक सीधी रेखा मिलती है P/S का अनुपात है।

$[\Lambda_m = \text{मोलर चालकता}]$

$\Lambda_m^0 = \text{सीमान्त मोलर चालकता}$

$c = \text{मोलर सान्द्रता}$

$K_a = \text{HX का वियोजन स्थिरांक}$

- (A) $K_a \Lambda_m^0$ (B) $K_a \Lambda_m^0 / 2$ (C) $2 K_a \Lambda_m^0$ (D) $1/(K_a \Lambda_m^0)$

Ans. [A]

Sol.

$$\alpha = \frac{\Lambda_m}{\Lambda_m^0}$$

$$K_a = \frac{c\alpha^2}{1-\alpha}$$

$$K_a = \frac{c(\Lambda_m / \Lambda_m^0)^2}{1 - (\Lambda_m / \Lambda_m^0)} = \frac{c\Lambda_m^2}{\Lambda_m^0(\Lambda_m^0 - \Lambda_m)}$$

$$K_a \Lambda_m^0 - K_a \Lambda_m^0 \Lambda_m = c\Lambda_m^2$$

$$\frac{K_a \Lambda_m^0}{\Lambda_m} - K_a \Lambda_m^0 = c\Lambda_m$$

$$\frac{K_a \Lambda_m^0}{\Lambda_m} = c\Lambda_m + K_a \Lambda_m^0$$

$$\frac{1}{\Lambda_m} = \left(\frac{c\Lambda_m}{K_a \Lambda_m^0} \right) + \frac{1}{\Lambda_m^0}$$

$$P = \frac{1}{\Lambda_m^0} ; S = \frac{1}{K_a \Lambda_m^0}$$

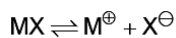
$$\frac{P}{S} = \left(\frac{\frac{1}{\Lambda_m^0}}{\frac{1}{K_a \Lambda_m^0}} \right) = K_a \Lambda_m^0$$

Q.6 pH को 7 से घटाकर 2 करने पर दुर्बल अम्ल (HX) के कम घुलनशील लवण (MX) की विलयशीलता 10^{-4} मोल लीटर⁻¹ से बढ़कर 10^{-3} मोल लीटर⁻¹ हो जाती है HX का pK_a है।

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 2

Ans. [B]

Sol.



$$S = \sqrt{k_{sp} \left(1 + \frac{H^{\oplus}}{k_a} \right)}$$

$$10^{-4} = \sqrt{k_{sp} \left(1 + \frac{10^{-7}}{k_a} \right)} \quad \dots(1)$$

$$10^{-3} = \sqrt{k_{sp} \left(1 + \frac{10^{-2}}{k_a} \right)} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1)/(2) देती है।

$$10^{-2} = \frac{\left(1 + \frac{10^{-7}}{k_a} \right)}{\left(1 + \frac{10^{-2}}{k_a} \right)}$$

$$10^{-2} + \frac{10^{-4}}{k_a} = 1 + \frac{10^{-7}}{k_a}$$

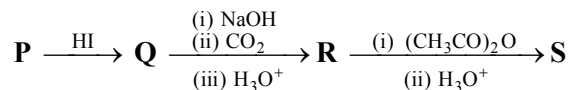
$$\frac{10^{-4} - 10^{-7}}{k_a} = 0.99$$

$$\frac{10^{-4}}{k_a} = 0.99$$

$$k_a = \frac{10^{-4}}{0.99} = \frac{1}{99} \times 10^{-2}$$

$$pK_a = 2 + \log 99 = 4$$

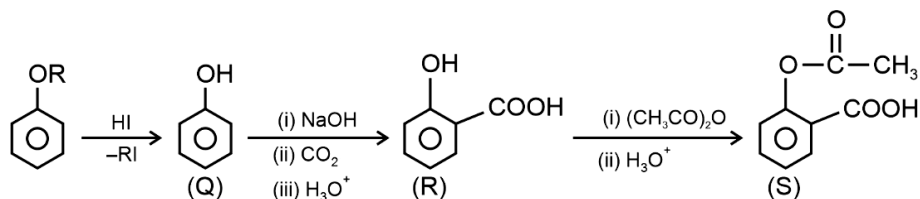
Q.7 दी गयी स्थिति में **P** फेनिल एल्किल ईथर तथा **Q** एक ऐरोमेटिक यौगिक है। **R** तथा **S** मुख्य उत्पाद है।



S के बारे में सही कथन है।

- (A) यह मुख्य रूप से नॉर एड्रेंनाइलाईन डिग्रेडिंग एंजाइम को संदमित करती है
 (B) प्रोस्टाग्लैडिन के संश्लेषण को संदमित करती है
 (C) यह एक मादक पदार्थ है
 (D) यह एक ऑर्थो एसीटिल बेन्जॉइक अम्ल है

Ans. [B]

Sol.


S ऑर्थो-एसीटॉक्सीबेन्जॉइक अम्ल है, यह प्रोस्टाग्लैडिन के संश्लेषण को संदमित करती ह.

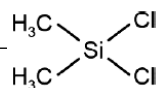
SECTION – 3 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX (06)** questions.
- The answer to each question is a **NON-NEGATIVE INTEGER**.
- For each question, enter the correct integer corresponding to the answer using the mouse and the onscreen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:
Full Marks : +4 If **ONLY** the correct integer is entered;
Zero Marks : 0 In all other cases.

Q.8 जल के साथ 516 g डाइ मिथाइल डाइ क्लोरोसिलेन की रससमीकरणमिति अभिक्रिया से टेट्रामेरिक चक्रीय उत्पाद **X** में 75% उत्पादित होता है। बनने वाले **X** का मान है ___.

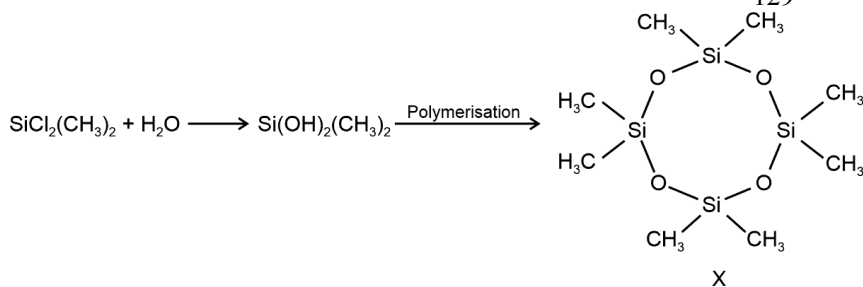
[उपयोग: मोलर द्रव्यमान (g mol^{-1}): H = 1, C = 12, O = 16, Si = 28, Cl = 35.5]

Ans. [222]

Sol. डाइ मिथाइल डाइ क्लोरोसिलेन –


मोल. द्रव्यमान – 129 g/mol

प्रारम्भ में लिये गये डाइ मिथाइल डाइ क्लोरोसिलेन के मोलो की संख्या = $\frac{516}{129} = 4$ moles



Si परमाणु पर POAC लगाने पर

टेट्रामेरिक चक्रीय उत्पाद के मोल बनते हैं $4 \times \frac{75}{100} = 0.75$ moles

बनने वाले उत्पाद का मोलर द्रव्यमान = 296 g/moles

बनने वाले उत्पाद का द्रव्यमान = $296 \times 0.75 = 222$ g

Q.9 800 K ताप और **x** atm दाब पर एक गैस का सपीडयता गुणांक 0.5 और मोलर आयतन $0.4 \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1}$ है यदि यह एक ही ताप व दाब पर आदर्श गैस व्यवहार दर्शाता है तो मोलर द्रव्यमान **y** $\text{dm}^3 \text{ mol}^{-1}$ होगा **x/y** का मान है [उपयोग, गैस नियतांक $R = 8 \times 10^{-2} \text{ L atm K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$]

Ans. [100]

Sol. सपीडयता गुणांक (Z) = $\frac{V_{\text{real}}}{V_{\text{ideal}}} = 0.5$

$V_{\text{real}} = 0.4 \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1} = 0.4 \text{ L/mol}$

$\therefore V_{\text{ideal}} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8 \text{ L/mol}$

$\therefore \boxed{y = 0.8 \text{ L/mol}}$

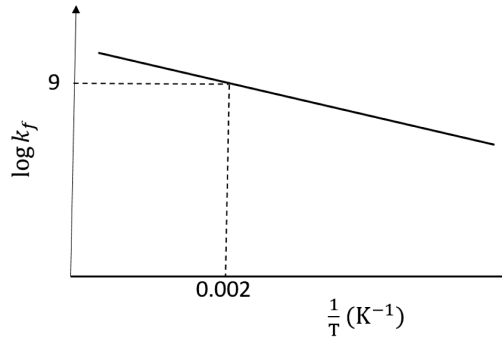
आदर्श गैस समीकरण के उपयोग से : $PV = nRT$

$$P = \frac{1 \times 8 \times 10^{-2} \times 800}{0.8}$$

$$\boxed{x = 80 \text{ atm}}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{80}{0.8} = 100$$

Q.10 उत्क्रमणीय अभिक्रिया $A(g) \rightleftharpoons P(g)$ के लिए $\log k_f$ के सापेक्ष $\frac{1}{T}$ का वक्र दर्शाया गया है



अग्र तथा पश्च अभिक्रियाओं के लिए पूर्व चरघाताकीय कारक 10^{15} s^{-1} तथा 10^{11} s^{-1} , क्रमशः है यदि 500 K पर अभिक्रिया के लिए $\log K$ का मान 6 है तो 250 K पर $|\log k_b|$ का मान ___ है.

[K = अभिक्रिया का साम्य स्थिरांक

k_f = अग्र अभिक्रिया का दर स्थिरांक

k_b = पश्च अभिक्रिया का दर स्थिरांक]

Ans. [5]

Sol. प्रश्न से

$$A_f = 10^{15}, A_b = 10^{11}, \quad f = \text{अग्र अभिक्रिया}$$

$$500 \text{ K ताप पर } \log K = 6 \quad b = \text{पश्च अभिक्रिया}$$

$$500 \text{ K ताप पर } \log k_f = 9 \text{ (ग्राफ से)}$$

$$500 \text{ K ताप पर } \log k_b:$$

$$\log K = \log \left(\frac{k_f}{k_b} \right) \Rightarrow K = \frac{k_f}{k_b}$$

$$6 = \log k_f - \log k_b$$

$$6 = 9 - \log k_b$$

$$\log k_b = 3 \text{ at } 500 \text{ K}$$

$$\log \frac{k_2}{k_1} = \frac{-E_a}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

$$k_b = A_b e^{\frac{-E_{ab}}{RT}}$$

$$\ln k_b = \ln \left(A_b e^{\frac{-E_{ab}}{RT}} \right)$$

$$\ln k_b = \ln A_b - \frac{E_{ab}}{RT}$$

$$2.303 \log k_b = 2.303 \log A_b - \frac{E_{ab}}{500R}$$

$$\frac{E_a}{500R} = 2.303(\log A_b - \log k_b)$$

$$\frac{E_a}{500R} = 2.303(\log 10^{11} - 3)$$

$$\frac{E_a}{500R} = 2.303(11 - 3) = 2.303 \times 8$$

$$E_a = 2.303 \times 8 \times 500R$$

$$\ln\left(\frac{k_2}{k_1}\right) = \frac{-E_a}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

$$\ln\left(\frac{k_{250K}}{k_{500K}}\right) = \frac{-E_a}{R} \left(\frac{1}{250} - \frac{1}{500}\right)$$

$$\ln\left(\frac{k_{250K}}{k_{500K}}\right) = \frac{-2.303 \times 8 \times 500R}{R} \left(\frac{1}{500}\right)$$

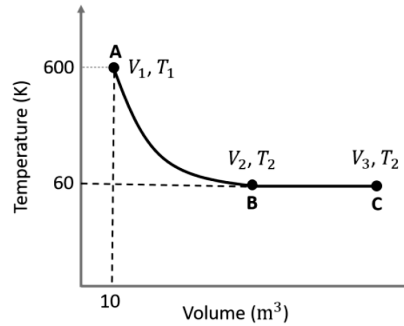
$$2.303(\log k_{250K} - \log k_{500K}) = -2.303 \times 8$$

$$\log k_{250K} - 3 = -8$$

$$\log k_{250K} = -5$$

$$|\log k_{250K}| = 5$$

Q.11 एक आदर्श मोनो आटोमिक गैस का एक मोल दो उत्क्रमणीय अभिक्रियाओं ($A \rightarrow B$ तथा $B \rightarrow C$) गुजरता है जैसा वक्र में दर्शाया गया है।:



$A \rightarrow B$ एक रुद्धोष्म प्रक्रम है। यदि पूर्ण प्रक्रिया ($A \rightarrow B$ तथा $B \rightarrow C$) में अवशोषित उष्मा $RT_2 \ln 10$ है तो $2 \log V_3$ का मान _____ है.

[उपयोग- स्थिर दाब पर गैस की मोलर उष्माधारिता, $C_{p,m} = \frac{5}{2} R$]

Ans. [7]

Sol. $q_{A \rightarrow C} = RT_2 \ln 10$

$q_{A \rightarrow B} = 0$ (\because रुद्धोष्म)

$q_{A \rightarrow C} = q_{A \rightarrow B} + q_{B \rightarrow C}$

$q_{A \rightarrow C} = q_{B \rightarrow C}$

$$q_{A \rightarrow C} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) \quad \dots(1)$$

For $B \rightarrow C$

$\Delta E = q + w$

$\Delta E = 0$ (समताप से)

$q = -w$

$$= - \left(-nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} \right)$$

$$= nRT_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right)$$

$$q_{B \rightarrow C} = nRT_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right)$$

$$q_{B \rightarrow C} = RT_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right) \quad [n = 1 \text{ से}]$$

A → B से

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

$$600 V_1^{\gamma-1} = 60 V_2^{\gamma-1}$$

$$10 \times 10^3^{\frac{5}{3}-1} = V_2^{\gamma-1}$$

$$10^{5/3} = V_2^{\frac{5}{3}-1}$$

$$10^{5/3} = V_2^{2/3}$$

$$V_2 = 10^{\frac{5}{3} \times \frac{3}{2}} = 10^{\frac{5}{2}}$$

$$V_2 = 10^{\frac{5}{2}} \quad \dots\dots(2)$$

समीकरण (1) से

$$q_{A \rightarrow C} = nRT_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right)$$

दिया है, $q_{A \rightarrow C} = RT_2 \ln 10$

$$RT_2 \ln 10 = RT_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right)$$

$$\ln 10 = \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right)$$

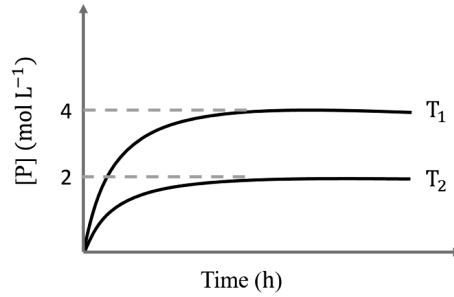
$$\ln 10 = \ln \left(\frac{V_3}{10^{\frac{5}{2}}} \right)$$

$$10 = \frac{V_3}{10^{\frac{5}{2}}}$$

$$V_3 = 10^{1 + \frac{5}{2}} = 10^{\frac{7}{2}}$$

$$2 \log V_3 = 2 \log 10^{7/2} = 7$$

Q.12 एक लीटर फ्लास्क में A के 6 मोल अभिक्रिया $A(g) \rightleftharpoons P(g)$ से गुजरते हैं दो तापमान T_1 and T_2 (केल्विन में), उत्पाद निर्माण की प्रक्रिया को वक्र में दर्शाया गया है :

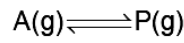


यदि $T_1 = 2T_2$ तथा $(\Delta G_2^\ominus - \Delta G_1^\ominus) = RT_2 \ln x$, तब x का मान ___ है.

[तापमान T_1 व T_2 पर अभिक्रिया के लिए मानक गिब्स मुक्त ऊर्जा परिवर्तन क्रमशः ΔG_1^\ominus तथा ΔG_2^\ominus है]

Ans. [8]

Sol.



प्रारम्भ में

6 0

साम्य पर

6-a a

ताप T_1 पर a = 4

ताप T_2 पर = 2

$$\therefore (K_{eq})_1 = \frac{4}{2} = 2$$

$$\therefore (K_{eq})_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta G_1^\ominus = -RT_1 \ln(K_{eq})_1$$

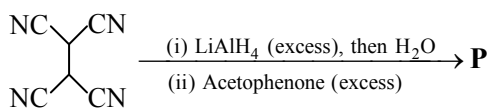
$$\Delta G_1^\ominus = -2RT_2 \ln(K_{eq})_1 \quad [\text{दिया है: } T_1 = 2T_2]$$

$$\Delta G_2^\ominus = -RT_2 \ln(K_{eq})_2$$

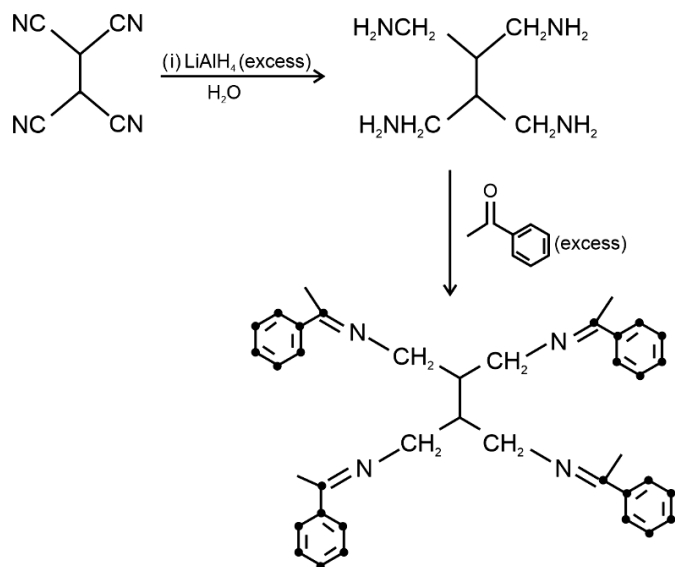
$$\begin{aligned} \therefore \Delta G_2^\ominus - \Delta G_1^\ominus &= RT_2 \ln \left(\frac{K_{eq1}}{K_{eq2}} \right)^2 \\ &= RT_2 \ln \frac{2^2}{\frac{1}{2}} = RT_2 \ln 8 \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta G^\ominus = RT \ln x \text{ has } x = 8$$

Q.13 निम्नलिखित अभिक्रिया के मुख्य उत्पाद **P** (एक अविषम चक्रीय यौगिक) में sp^2 संकरित कार्बन परमाणुओं की कुल संख्या ___ है.



Ans. [28]

Sol.

 सभी चिन्हित C- परमाणु sp^2 सकरित है।

SECTION – 4 (Maximum marks : 12)

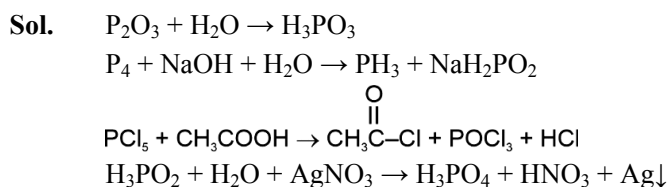
- This section contains **FOUR (04)** Matching List Sets.
- Each set has **ONE** Multiple Choice Question.
- Each set has **TWO** lists: **List-I** and **List-II**.
- **List-I** has **Four** entries (P), (Q), (R) and (S) and **List-II** has **Five** entries (1), (2), (3), (4) and (5).
- **FOUR** options are given in each Multiple Choice Question based on **List-I** and **List-II** and **ONLY ONE** of these four options satisfies the condition asked in the Multiple Choice Question.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:
Full Marks : +3 **ONLY** if the option corresponding to the correct combination is chosen;
Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks : -1 In all other cases.

Q.14 सूची-I में दी गयी अभिक्रियाओ (अभिकारको के दि गयी रससमीकरणमिति में) को सूची-II में दिए गये उनके उत्पादो में से एक के साथ मिलाए और सही विकल्प का चयन करें

	सूची-I		सूची-II
(P)	$P_2O_3 + 3H_2O \rightarrow$	(1)	$P(O)(OCH_3)Cl_2$
(Q)	$P_4 + 3NaOH + 3H_2O \rightarrow$	(2)	H_3PO_3
(R)	$PCl_5 + CH_3COOH \rightarrow$	(3)	PH_3
(S)	$H_3PO_2 + 2H_2O + 4AgNO_3 \rightarrow$	(4)	$POCl_3$
		(5)	H_3PO_4

- (A) P \rightarrow 2; Q \rightarrow 3; R \rightarrow 1; S \rightarrow 5
 (B) P \rightarrow 3; Q \rightarrow 5; R \rightarrow 4; S \rightarrow 2
 (C) P \rightarrow 5; Q \rightarrow 2; R \rightarrow 1; S \rightarrow 3
 (D) P \rightarrow 2; Q \rightarrow 3; R \rightarrow 4; S \rightarrow 5

Ans. [D]



अतः :-

P \rightarrow 2

Q \rightarrow 3

R \rightarrow 4

S \rightarrow 5

Q.15 सूची-I में दिए गये इलेक्ट्रॉनिक विन्यासों को सूची-II में उपयुक्त धातु संकुल आयनों के साथ सुमेलित कीजिए और सही विकल्प का चयन करें

[परमाणु क्रमांक: Fe = 26, Mn = 25, Co = 27]

	सूची-I		सूची-II
(P)	$t_{2g}^6 e_g^0$	(1)	$[Fe(H_2O)_6]^{2+}$
(Q)	$t_{2g}^3 e_g^2$	(2)	$[Mn(H_2O)_6]^{2+}$
(R)	$e^2 t_2^3$	(3)	$[Co(NH_3)_6]^{3+}$
(S)	$t_{2g}^4 e_g^2$	(4)	$[FeCl_4]^-$
		(5)	$[CoCl_4]^{2-}$

(A) P \rightarrow 1; Q \rightarrow 4; R \rightarrow 2; S \rightarrow 3

(B) P \rightarrow 1; Q \rightarrow 2; R \rightarrow 4; S \rightarrow 5

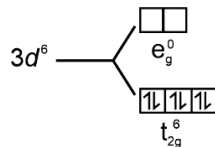
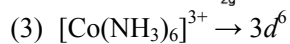
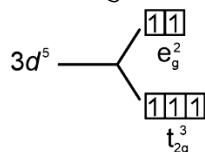
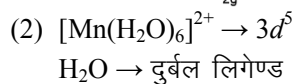
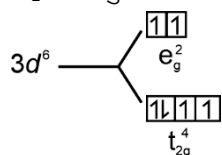
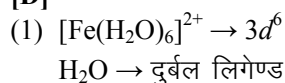
(C) P \rightarrow 3; Q \rightarrow 2; R \rightarrow 5; S \rightarrow 1

(D) P \rightarrow 3; Q \rightarrow 2; R \rightarrow 4; S \rightarrow 1

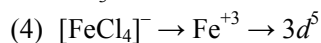
Ans.

[D]

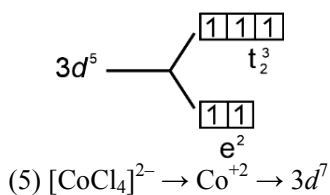
Sol.



$NH_3 \rightarrow$ प्रबल लिगेण्ड



$Cl^- \rightarrow$ दुर्बल लिगेण्ड



$\text{Cl}^- \rightarrow$ दुर्बल लिगेण्ड



$\therefore P \rightarrow 3, Q \rightarrow 2, R \rightarrow 4, S \rightarrow 1$

Q.16 सूची-I में दी गयी अभिक्रियाओं को सूची-II में उनके उत्पादों की विशेषताओं से सुमेलित कीजिए और सही विकल्प का चयन करें

	सूची -I	सूची -II
(P)	(-)-1-Bromo-2-ethylpentane (single enantiomer) $\xrightarrow[\text{S}_{\text{N}}2 \text{ reaction}]{\text{aq. NaOH}}$	(1) विन्यास का व्युत्क्रमण
(Q)	(-)-2-Bromopentane (single enantiomer) $\xrightarrow[\text{S}_{\text{N}}2 \text{ reaction}]{\text{aq. NaOH}}$	(2) विन्यास का धारण
(R)	(-)-3-Bromo-3-methylhexane (single enantiomer) $\xrightarrow[\text{S}_{\text{N}}1 \text{ reaction}]{\text{aq. NaOH}}$	(3) प्रतिबिंब रूप का मिश्रण
(S)	 (single enantiomer) $\xrightarrow[\text{S}_{\text{N}}1 \text{ reaction}]{\text{aq. NaOH}}$	(4) सरचनात्मक समावयवियों का मिश्रण
		(5) विवरिम रूप का मिश्रण

(A) $P \rightarrow 1; Q \rightarrow 2; R \rightarrow 5; S \rightarrow 3$

(B) $P \rightarrow 2; Q \rightarrow 1; R \rightarrow 3; S \rightarrow 5$

(C) $P \rightarrow 1; Q \rightarrow 2; R \rightarrow 5; S \rightarrow 4$

(D) $P \rightarrow 2; Q \rightarrow 4; R \rightarrow 3; S \rightarrow 5$

Ans. [B]

Sol. (P) किरल कार्बन पर विन्यास समान होता है.

$P \rightarrow 2$ [किरल कार्बन पर अभिक्रिया नहीं होती है]

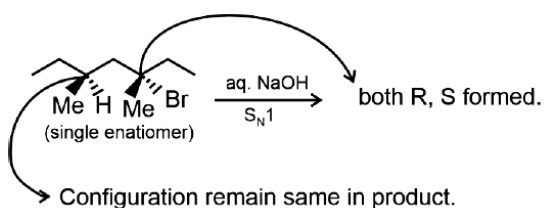
(Q) किरल कार्बन पर विन्यास परिवर्तित होता है.

$Q \rightarrow 1$

(R) $\text{S}_{\text{N}}1 \rightarrow$ सरचनात्मक समावयवियों का मिश्रण बनता है.

$R \rightarrow 3$

(S)



\therefore इसलिए विवरिम रूपी मिश्रण बनता है।

$S \rightarrow 5$

Q.17 सूची-II में अभिक्रियाओं से प्राप्त मुख्य उत्पाद सूची-I में उल्लेखित नामित अभिक्रियाओं के अभिकारक हैं। सूची-I को सूची-II से सुमेलित कीजिए और सही विकल्प का चयन कीजिए

	सूची-I	सूची-II
(P)	इटार्ड अभिक्रिया	(1) Acetophenone $\xrightarrow{\text{Zn-Hg, HCl}}$
(Q)	गाटरमान अभिक्रिया	(2) Toluene $\xrightarrow[\text{(ii) SOCl}_2]{\text{(i) KMnO}_4, \text{KOH}, \Delta}$
(R)	गाटरमान कोच अभिक्रिया	(3) Benzene $\xrightarrow[\text{anhyd. AlCl}_3]{\text{CH}_3\text{Cl}}$
(S)	रासेनमण्ड अभिक्रिया	(4) Aniline $\xrightarrow[273-278 \text{ K}]{\text{NaNO}_2/\text{HCl}}$
		(5) Phenol $\xrightarrow{\text{Zn}, \Delta}$

(A) P → 2; Q → 4; R → 1; S → 3

(B) P → 1; Q → 3; R → 5; S → 2

(C) P → 3; Q → 2; R → 1; S → 4

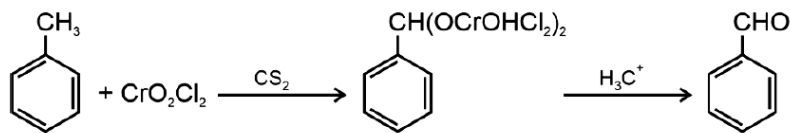
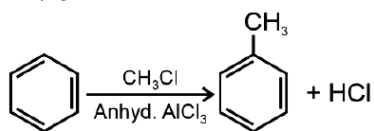
(D) P → 3; Q → 4; R → 5; S → 2

Ans.

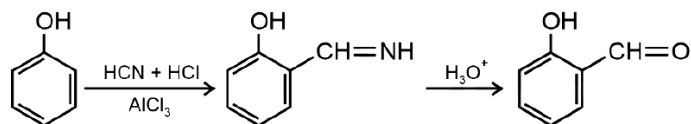
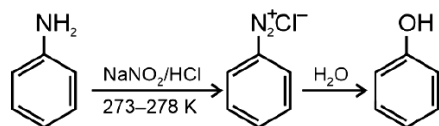
[D]

Sol.

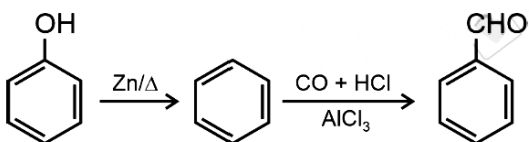
P → 3



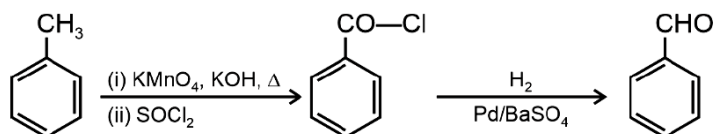
Q → 4



R → 5



S → 2



JEE Advanced Exam 2023 (Paper & Solution)

Date : 04 / 06 / 2023

PAPER-1

MATHEMATICS

SECTION – 1 (Maximum Marks: 12)

- This section contains **THREE (03)** questions.
- Each question has **FOUR** options (A), (B), (C) and (D). **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is(are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:
 - Full Marks : +4 **ONLY** if (all) the correct option(s) is(are) chosen;
 - Partial Marks : +3 If all the four options are correct but **ONLY** three options are chosen;
 - Partial Marks : +2 If three or more options are correct but **ONLY** two options are chosen, both of which are correct;
 - Partial Marks : +1 If two or more options are correct but **ONLY** one option is chosen and it is a correct option;
 - Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
 - Negative Marks : -2 In all other cases.
- For example, in a question, if (A), (B) and (D) are the **ONLY** three options corresponding to correct answers, then
 - choosing **ONLY** (A), (B) and (D) will get +4 marks;
 - choosing **ONLY** (A) and (B) will get +2 marks;
 - choosing **ONLY** (A) and (D) will get +2 marks;
 - choosing **ONLY** (B) and (D) will get +2 marks;
 - choosing **ONLY** (A) will get +1 mark;
 - choosing **ONLY** (B) will get +1 mark;
 - choosing **ONLY** (D) will get +1 mark;
 - choosing no option (i.e. the question is unanswered) will get 0 marks; and
 - choosing any other combination of options will get -2 marks.

- Q.1** मान लीजिए $S = (0,1) \cup (1,2) \cup (3,4)$ और $T = \{0,1, 2,3\}$ तो निम्नलिखित में से कौनसा कथन सत्य है (हैं) ?
- (A) S से T तक अपरिमित रूप से अनेक फलन है।
- (B) S से T तक अपरिमित रूप से अनेक वास्तविक बढ़ते हुये फलन हैं।
- (C) S से T तक सतत फलनों की संख्या अधिकतम 120 है।
- (D) S से T तक प्रत्येक सांतत्य फलन अवकलनिय है।

Ans. [A,C,D]

Sol. $S = (0, 1) \cup (1, 2) \cup (3, 4)$ तथा $T = \{0, 1, 2, 3\}$.

मान लीजिए एक फलन $y = f(x)$ के प्रांत व सहप्रांत क्रमशः S और T है।

(A) प्रांत में अनन्त रूप से कई अवयव है तथा सहप्रांत में चार अवयव है।

\Rightarrow S से T तक अनन्त रूप से कई अवयव है।

\Rightarrow विकल्प (A) सही है।

(B) यदि प्रांत में अवयवों की संख्या सहप्रांत में अवयवों की संख्या से अधिक है। तो वास्तविक वर्धमान फलन की संख्या शून्य है।

\Rightarrow विकल्प (B) गलत है।

(C) सतत फलनों की अधिकतम संख्या $= 4 \times 4 \times 4 = 64$

(प्रत्येक उपसमुच्चय $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 4)$ के चार विकल्प है)

$\therefore 64 < 120 \Rightarrow$ विकल्प (C) सही है।

(D) प्रत्येक बिन्दु जिस पर $f(x)$ संतत है के लिये $f'(x) = 0$

\Rightarrow S से T तक प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय है।

विकल्प (D) सही है

Q.2 मान लीजिए T_1 व T_2 दीर्घवृत्त $E : \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ और परवलय $P : y^2 = 12x$ के लिये दो अलग अलग स्पर्श रेखाएँ है। मान लीजिए T_1 , P तथा E को क्रमशः बिन्दुओं A_1 तथा A_2 पर स्पर्श करती है और T_2 , P और E को क्रमशः बिन्दुओं A_4 तथा A_3 पर स्पर्श करती है तो निम्नलिखित में से कौनसा कथन सत्य है (हैं)?

(A) चतुर्भुज $A_1A_2A_3A_4$ का क्षेत्रफल 35 वर्ग ईकाई है।

(B) चतुर्भुज $A_1A_2A_3A_4$ का क्षेत्रफल 36 वर्ग ईकाई है।

(C) स्पर्श रेखाएँ T_1 तथा T_2 x-अक्ष पर बिन्दु $(-3, 0)$ पर मिलती है।

(D) स्पर्श रेखाएँ T_1 तथा T_2 x- अक्ष पर बिन्दु $(-6, 0)$ पर मिलती है।

Ans. [A,C]

Sol. $E : \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$, स्पर्श रेखा : $y = m_1x \pm \sqrt{6m_1^2 + 3}$

$P : y^2 = 12x$, स्पर्श रेखा : $y = m_2x + \frac{3}{m_2}$

(उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा के लिये)

$$m = m_1 = m_2, \sqrt{6m_1^2 + 3} = \frac{3}{m_2}$$

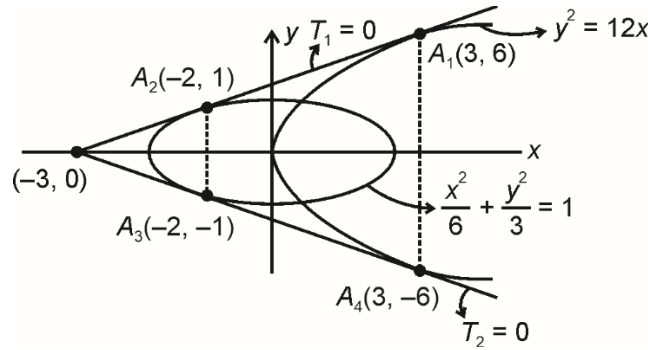
$$\Rightarrow m = \pm 1$$

\Rightarrow उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण $y = x + 3$ तथा $y = -x - 3$ परवलय के लिये संपर्क बिंदु $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ है।

$$\Rightarrow A_1 \equiv (3, 6), A_4 (3 - 6)$$

मान लीजिए $A_2(x_1, y_1) \Rightarrow E$ की स्पर्श रेखा $\frac{xx_1}{6} + \frac{yy_1}{3} = 1$ है।

A_3 x-अक्ष में A_2 का दर्पण प्रतिबिंब $\Rightarrow A_3(-2, -1)$ है।



T_1 का मध्यवर्ती बिन्दु = 0 और $T_2 = 0$ $(-3, 0)$

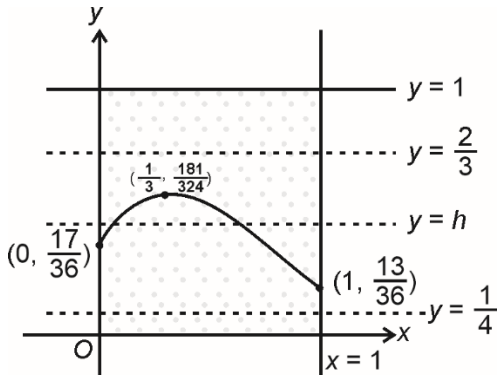
चतुर्भुज का क्षेत्रफल $A_1A_2A_3A_4 = \frac{1}{2} (12 + 2) \times 5 = 35$ वर्ग इकाई।

Q.3 मान लीजिए $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{5}{9}x + \frac{17}{36}$ द्वारा परिभाषित फलन है। वर्ग क्षेत्र $S = [0,1] \times [0,1]$ पर विचार करें। मान लीजिए $G = \{(x, y) \in S : y > f(x)\}$ को हरा क्षेत्र और $R = \{(x, y) \in S : y < f(x)\}$ को लाल क्षेत्र कहा जाता है। मान लीजिए $L_h = \{(x, h) \in S : x \in [0,1]\}$ ऊँचाई $h \in [0, 1]$ पर क्षैतिज रेखा खींची गई। तो निम्नलिखित में से कौनसा कथन सत्य है (हैं) ?

- (A) एक $h \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]$ इस प्रकार है कि रेखा L_h के ऊपर हरे क्षेत्र का क्षेत्रफल, रेखा L_h के नीचे हरे क्षेत्र का क्षेत्रफल बराबर है।
- (B) एक $h \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]$ इस प्रकार है कि रेखा L_h के ऊपर लाल क्षेत्र का क्षेत्रफल, रेखा L_h के नीचे लाल क्षेत्र का क्षेत्रफल बराबर है।
- (C) एक $h \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]$ इस प्रकार है कि रेखा L_h के ऊपर हरे क्षेत्र का क्षेत्रफल, रेखा L_h के नीचे लाल क्षेत्र का क्षेत्रफल बराबर है।
- (D) एक $h \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]$ इस प्रकार है कि रेखा L_h के ऊपर लाल क्षेत्र का क्षेत्रफल रेखा L_h के नीचे हरे क्षेत्र का क्षेत्रफल बराबर है।

Ans. [B,C,D]

Sol.



$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{5}{9}x + \frac{17}{36}, f'(x) = x^2 - 2x + \frac{5}{9}$$

उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ के लिये, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

$$A_R = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \Rightarrow A_G = \frac{1}{2}$$

(A) $1 - h = h - \frac{1}{2} \Rightarrow h = \frac{3}{4}, \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ विकल्प (A) गलत है।

(B) $h = \frac{1}{2} - h \Rightarrow h = \frac{1}{4} \Rightarrow$ विकल्प (B) सही है।

$$(C) \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}, \int_0^1 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{2} \right) dx = 0$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{विकल्प (C) सही है।}$$

(D) \therefore विकल्प (C) सही है \Rightarrow विकल्प (D) भी सही होगा

SECTION – 2 [Maximum Mark : 12]

- This section contains **FOUR (04)** questions.
- Each question has **FOUR** options (A), (B), (C) and (D). **ONLY ONE** of these four options is the correct answer.
- For each question, choose the option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks	: +3	If ONLY the correct option is chosen.
Zero Marks	: 0	If none of the option is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks	: -1	In all other cases.

Q.4 मान लीजिए $f : (0,1) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{n}$ द्वारा परिभाषित है। यदि $x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)$ जहाँ $n \in \mathbf{N}$, माना $g : (0,1) \rightarrow \mathbf{R}$

एक फलन इस प्रकार है कि $\int_{x^2}^x \sqrt{\frac{1-t}{t}} dt < g(x) < 2\sqrt{x}$, $\forall x \in (0,1)$ तो $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$

(A) विद्यमान नहीं है (B) 1 के बराबर है (C) 2 के बराबर है (D) 3 के बराबर है

Ans. [C]

Sol. कुछ उत्तर प्राप्त करने के लिये हमें एक तरफ की सीमा को हल करने की आवश्यकता है अन्यथा $\lim_{x \rightarrow 0^-}$ यहां विद्यमान नहीं है। (प्रांत में नहीं)

$$f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right) - 1} \text{ जहाँ } (*) = \text{निम्नतम पूर्णांक फलन}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{x^2}^x \sqrt{\frac{1-t}{t}} dt \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right) - 1} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \cdot g(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right) - 1} \times 2\sqrt{x}$$

$$\text{अब } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right) - 1} \times 2\sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{\left[\frac{1}{x}\right] - \left\{\frac{1}{x}\right\}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x \left(\frac{1}{x} - \left\{ \frac{1}{x} \right\} \right)} = 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x\left(\frac{1}{x}\right)} = 2; \left(\frac{1}{x} \notin Z\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{x^2}^x \sqrt{\frac{1-t}{t}} dt \cdot \sqrt{\frac{1}{x} - \left\{\frac{1}{x}\right\}} = \frac{\int_{x^2}^x \sqrt{\frac{1-t}{t}} dt \cdot \sqrt{1-x\left\{\frac{1}{x}\right\}}}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{x^2}^x \sqrt{\frac{1-t}{t}} dt}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}} - 2x\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{1-x} - 4\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x^2} = 2$$

इसी प्रकार $\frac{1}{x} \in Z$ के लिये 2 के बराबर है।

Q.5 मान लीजिए Q, शीर्षों $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}\}$ के समुच्चय का घन है। मान लीजिए F सभी 12 रेखाओं का समुच्चय है जिसमें घन Q के छः फलकों के विकर्ण समाविष्ट हैं। मान लीजिए घन Q के मुख्य विकर्णों वाली सभी चार रेखाओं का समुच्चय S है। उदाहरण के लिये शीर्षों (0,0,0) तथा (1,1,1) से गुजरने वाली रेखा S में है। रेखाओं l_1 तथा l_2 के लिये, मान लीजिए $d(l_1, l_2)$ उनके मध्य निम्नतम दूरी को दर्शाती है, तो $d(l_1, l_2)$ का अधिकतम मान है, l_1, F से भिन्न है और l_2, S से भिन्न है।

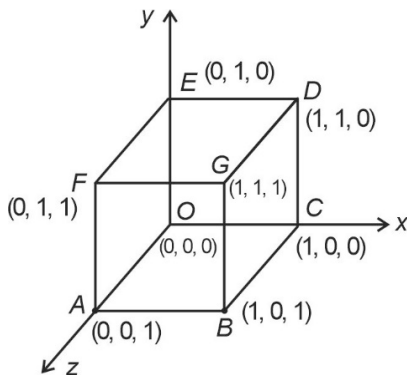
(A) $\frac{1}{\sqrt{6}}$

(B) $\frac{1}{\sqrt{8}}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{12}}$

Ans. [A]
Sol.



OD रेखा का समीकरण

$$\vec{r} = \vec{0} + \lambda(\hat{i} + \hat{j})$$

विकर्ण BE का समीकरण

$$\vec{r} = \hat{j} + \alpha(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

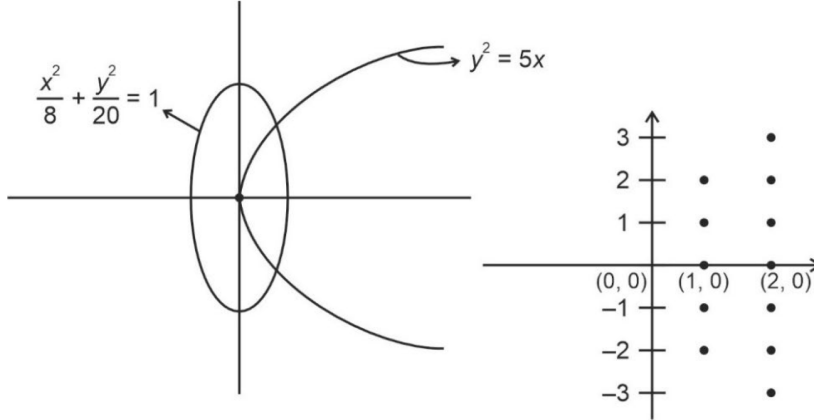
$$S.D = \left| \frac{\hat{j} \cdot (\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})}{\sqrt{6}} \right| = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

अन्य स्थिति में S.D शून्य है

- Q.6** मान लीजिए $X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{20} < 1 \text{ and } y^2 < 5x \right\}$. तीन अलग अलग बिन्दुओं P, Q तथा R, X से यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। तो एक त्रिभुज जिसका क्षेत्रफल धनात्मक पूर्णांक है तो P, Q तथा R की प्रायिकता होगी -
- (A) $\frac{71}{220}$ (B) $\frac{73}{220}$ (C) $\frac{79}{220}$ (D) $\frac{83}{220}$

Ans. [B]

Sol. दिया गया क्षेत्र इस प्रकार है।



क्षेत्र के अन्दर बिन्दु $\{(2, 1), (2, -1), (2, 2), (2, -2), (2, 3), (2, -3), (2, 0), (1, 1), (1, -1), (1, 2), (1, -2), (1, 0)\}$ है।

तीन बिन्दुओं को चुनने के तरीकों की कुल संख्या $= {}^{12}C_3 = 220$

त्रिभुज की अभिष्ट संख्या $= 4 \times {}^7C_1 + 9 \times {}^5C_1 = 73$

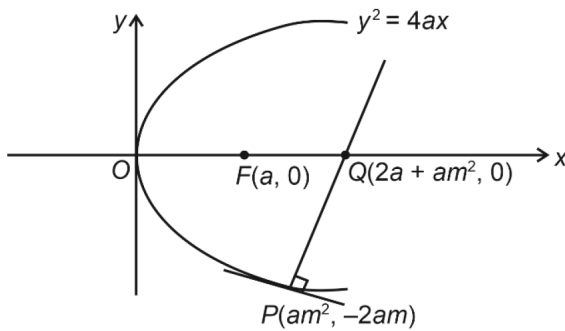
बिन्दुओं को इस प्रकार लिया जाता है कि दो बिन्दुओं के बीच की दूरी 2 का गुणज हो।

- Q.7** मान लीजिए P, परवलय $y^2 = 4ax$ पर एक बिन्दु है जहाँ $a > 0$. P पर परवलय का अभिलंब x-अक्ष को बिन्दु Q पर मिलता है त्रिभुज PFQ का क्षेत्रफल 120 है, जहाँ F परवलय की फोकस है। यदि अभिलंब का ढाल m और a दोनों धनात्मक पूर्णांक है तो युग्म (a, m) है -

- (A) (2, 3) (B) (1, 3) (C) (2, 4) (D) (3, 4)

Ans. [A]

Sol.



P $(am^2, -2am)$ पर अभिलंब का समीकरण $y = mx - 2am - am^3$ है

$$\Rightarrow \Delta PFQ \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} (a + am^2) \times 2am = 120$$

$$a^2m(1 + m^2) = 120$$

युग्म (a, m) $\equiv (2, 3)$ उपरोक्त समीकरण को संतुष्ट करता है।

SECTION – 3 [Maximum Mark : 24]

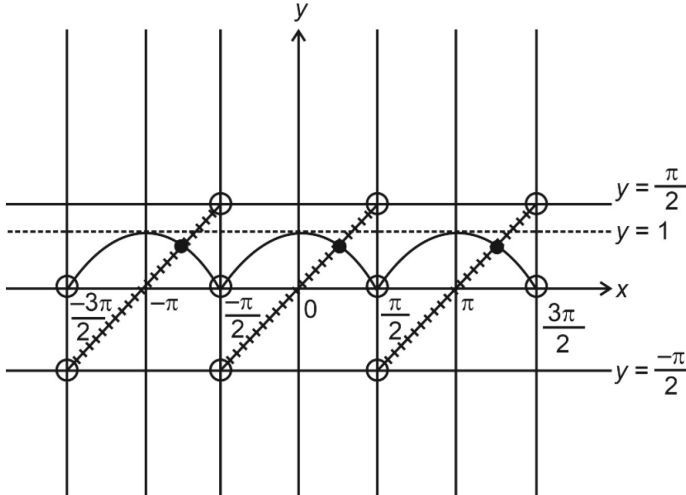
- This section contains **SIX (06)** questions.
- The answer to each question is a **NON-NEGATIVE INTEGER**.
- For each question, enter the correct integer corresponding to the answer using the mouse and the onscreen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks	: +4	If ONLY the correct integer is entered;
Negative Marks	: 0	In all other cases.

Q.8 मान लीजिए $x \in \mathbb{R}$ के लिये $\tan^{-1}(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, तो समुच्चय $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ में समीकरण $\sqrt{1 + \cos(2x)} = \sqrt{2} \tan^{-1}(\tan x)$ के वास्तविक हलों की संख्या बराबर है -

Ans. [3]

Sol. $\sqrt{1 + \cos 2x} = \sqrt{2} \tan^{-1}(\tan x)$
 $\Rightarrow |\cos x| = \tan^{-1}(\tan x)$



हलों की संख्या = प्रतिच्छेदन बिन्दुओं की संख्या = 3

Q.9 मान लीजिए $n \geq 2$ एक प्राकृतिक संख्या है और $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} n(1 - 2nx) & \text{यदि } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n(2nx - 1) & \text{यदि } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{3}{4n} \\ 4n(1 - nx) & \text{यदि } \frac{3}{4n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{n}{n-1}(nx - 1) & \text{यदि } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन है। यदि n इस प्रकार है कि वक्रों $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ तथा $y = f(x)$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल 4 है तो फलन f का अधिकतम मान है -

Ans. [8]

Sol. $f(x) = \begin{cases} n(1-2nx), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n(2nx-1), & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{3}{4n} \\ 4n(1-nx), & \frac{3}{4n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{n}{n-1}(nx-1), & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$

$$x \in [0, 1]$$

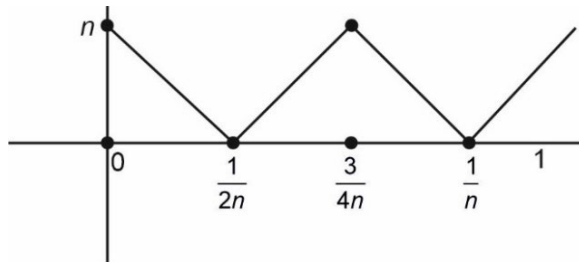
$f(x)$, $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$ में ह्रासमान है।

$\left[\frac{1}{2n}, \frac{3}{4n}\right]$ में वर्धमान है

$\left[\frac{3}{4n}, \frac{1}{n}\right]$ में ह्रासमान है

$\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ में वर्धमान है

ग्राफ



$$f(x) \in [0, n]$$

$$\text{क्षेत्रफल} = 4 \Rightarrow n = 8 = \text{और } f(x)_{\max} = n = 8$$

Q.10 मान लीजिए $\overbrace{75\dots 57}^r$, $(r+2)$ अंक संख्या को निरूपित करते हैं जहाँ प्रथम और अंतिम अंक 7 है और शेष r अंक 5 है।

योग $S = 77 + 757 + 7557 + \overbrace{75\dots 57}^{98}$ पर विचार करें। यदि $S = \frac{\overbrace{75\dots 57}^{99} + m}{n}$ जहाँ m तथा n , 3000 से छोटी प्राकृत संख्यायें हैं तो $m+n$ का मान है -

Ans. [1219]

Sol. $S = 77 + 757 + 7557 + \dots + \overbrace{75\dots 57}^{98}$

$$= 7(10 + 10^2 + \dots + 10^{99}) + 50(1 + 11 + \dots + \overbrace{111\dots 1}^{98}) + 7 \times 99$$

$$= 70 \left(\frac{10^{99} - 1}{9} \right) + \frac{50}{9} [(10 - 1) + (10^2 - 1) + \dots + (10^{98} - 1)] + 7 \times 99$$

$$= 77 \left(\frac{10^{99} - 1}{9} \right) + \frac{50}{9} \left[10 \left(\frac{10^{98} - 1}{9} \right) - 98 \right] + 7 \times 99$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{7 \times 10^{100}}{9} - \frac{70}{9} + \frac{50}{9} \left[\frac{10^{99} - 1 - 9}{9} - 98 \right] + 7 \times 99 \\
 &= \frac{7 \times 10^{100}}{9} - \frac{70}{9} + \frac{50}{9} [\overbrace{111\dots1}^{99} - 99] + 7 \times 99 \\
 &= \frac{7 \times 10^{100} - 70 + \overbrace{555\dots50}^{99}}{9} - 550 + 693 \\
 &= \frac{\overbrace{7555\dots5}^{99} - 70 + 143 \times 9}{9} = \frac{\overbrace{755\dots57}^{99} + 1210}{9} \\
 m + n &= 1219
 \end{aligned}$$

Q.11 माना $A = \left(\frac{1967 + 1686i \sin \theta}{7 - 3i \cos \theta} : \theta \in \mathbb{R} \right)$. यदि A में ठीक एक धनात्मक पूर्णांक n है तो n का मान है -

Ans. [281]

Sol. $z = \frac{1967 + 1686i \sin \theta}{7 - 3i \cos \theta}$ एक धनात्मक पूर्णांक है।

$$z = \frac{(1967 + 1686i \sin \theta)(7 + 3i \cos \theta)}{(7 - 3i \cos \theta)(7 + 3i \cos \theta)}$$

$$1967 = 281 \times 7; 1686 = 281 \times 6$$

$$z = \frac{1967 \times 7 - 1686 \times 3 \sin \theta \cos \theta + i(1686 \times 7 \sin \theta + 1967 \times 3 \cos \theta)}{49 + 9 \cos^2 \theta}$$

$$(281 \times 6) \times 7 \sin \theta + (281 \times 7) \times 3 \cos \theta = 0$$

$$\tan \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{4}{5}; \sin \theta \cos \theta = -\frac{2}{5}$$

$$z = \frac{(281 \times 7 \times 7) - (281 \times 6) \times 3 \left(-\frac{2}{5} \right)}{49 + 9 \times \frac{4}{5}} = \frac{281 \left(49 + \frac{36}{5} \right)}{\left(49 + \frac{36}{5} \right)} = 281$$

Q.12 मान लीजिए P, समतल $\sqrt{3}x + 2y + 3z = 16$ है और माना

$S = \left\{ \alpha \hat{i} + \beta \hat{j} + \gamma \hat{k} : \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \text{ और समतल P से } (\alpha, \beta, \gamma) \text{ की दूरी } \frac{7}{2} \text{ है} \right\}$. मान लीजिए \vec{u} , \vec{v} तथा \vec{w} तीन

भिन्न सदिश S में इस प्रकार है कि $|\vec{u} - \vec{v}| = |\vec{v} - \vec{w}| = |\vec{w} - \vec{u}|$. माना V, सदिशों \vec{u} , \vec{v} तथा \vec{w} द्वारा परिभाषित समान्तर चतुर्भुज का आयतन है तो $\frac{80}{\sqrt{3}}V$ का मान है -

Ans. [45]

Sol. P : $\sqrt{3}x + 2y + 3z = 16$

$$S = \alpha \hat{i} + \beta \hat{j} + \gamma \hat{k} : \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

$$d(\alpha, \beta, \gamma) \text{ from P} = \frac{7}{2}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = |\vec{v} - \vec{w}| = |\vec{w} - \vec{u}|$$

V : सदिशो \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} द्वारा समांतर चतुर्भुज का आयतन

$$\frac{80}{\sqrt{3}} V = ?$$

$$d(\alpha, \beta, \gamma), \beta = \frac{7}{2} \text{ (दिया है)}$$

$$\Rightarrow \frac{|\sqrt{3}\alpha + 2\beta + 3\gamma - 16|}{\sqrt{3+4+9}} = \frac{7}{2}$$

$$= \frac{|\sqrt{3}\alpha + 2\beta + 3\gamma - 16|}{4} = \frac{7}{2}$$

$$|\sqrt{3}\alpha + 2\beta + 3\gamma - 16| = 14 \dots (i)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \dots (ii)$$

(सदिशा \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} द्वारा समांतर चतुर्भुज का आयतन

$$V = [\vec{u} \vec{v} \vec{w}]$$

$$= \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \dots (iii)$$

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1 \text{ (दिया है)} \dots (iv)$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = |\vec{v} - \vec{w}| = |\vec{w} - \vec{u}| \text{ (दिया है)}$$

$$\Rightarrow |\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{w} - \vec{u}|^2$$

$$\Rightarrow u^2 + v^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = v^2 + w^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w} = w^2 + u^2 - 2\vec{w} \cdot \vec{u}$$

$$(A) \qquad (B) \qquad (C)$$

(A) तथा (B)

$$\Rightarrow u^2 + v^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = v^2 + w^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w}$$

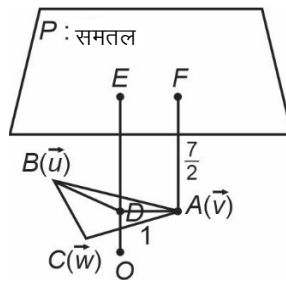
$$\Rightarrow u^2 - w^2 = 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{w} \qquad [\because |\vec{u}| = |\vec{w}| = 1 \text{ (दिया है)}]$$

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w}$$

अतः B व C के प्रयोग से हमें प्राप्त होगा

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{u} = m \text{ (माना)}$$

एक समबाहु त्रिभुज के सदिश \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} (माना ΔABC)



$$d(O, P) = \frac{16}{\sqrt{3+4+9}} = \frac{16}{4} = 4 \text{ इकाई}$$

$$\vec{OA} = \vec{u}, \vec{OB} = \vec{v}, \vec{OC} = \vec{w}$$

$$|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = 1 \text{ (दिया है)}$$

एक समबाहु त्रिभुज में परिकेन्द्र लंबकेन्द्र तथा केन्द्रक सपांती होते हैं।

(मान लीजिए D, ΔABC का परिकेन्द्र होगा तब

$$\angle ADB = 120^\circ$$

$$(\text{दिया है}) = \frac{DA^2 + DB^2 - AB^2}{2(DA) \cdot (DB)} \quad \dots(\text{vi})$$

$$OE = OD + DE \\ = OD + AF$$

$$\Rightarrow 4 = OD + \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow OD = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow DA = \sqrt{OA^2 - OD^2} \\ = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$$

$$DA = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow DA = DB = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots(\text{vii})$$

(vi व vii से)

$$-\frac{1}{2} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - AB^2}{2 \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{\frac{3}{2} - AB^2}{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - AB^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = \frac{3}{2} + \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow AB^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow AB - \frac{3}{2} = |\vec{u} - \vec{v}|$$

$$\Rightarrow AB^2 = \frac{9}{4} = u^2 + v^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4} = 1 + 1 - 2m$$

$$\Rightarrow 2m = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow m = -\frac{1}{8} \quad \dots(\text{viii})$$

(समांतर चतुर्भुज का आयतन)

$$V = [\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}]$$

$$|\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}|^2 = \begin{vmatrix} 1 & \vec{u} \cdot \vec{v} & \vec{u} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} & 1 & \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{w} \cdot \vec{u} & \vec{w} \cdot \vec{v} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1(1 - m^2) - m(m - m^2) + m(m^2 - m) \\
 &= 1 - m^2 - m^2 + m^3 + m^3 - m^2 \\
 &= 1 - 3m^2 + 2m^3 \\
 |\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}|^2 &= 2m^3 - 3m^2 + 1 \\
 &= (m - 1) [2m^2 - m - 1] \\
 &= (m - 1) [2m^2 - 2m + m - 1] \\
 &= (m - 1) (m - 1) (2m + 1) \\
 &= (m - 1)^2 (2m + 1) \\
 \Rightarrow |[\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}]| &= (m - 1) \sqrt{(2m + 1)} = v
 \end{aligned}$$

$$\left| \left(-\frac{1}{8} - 1 \right) \sqrt{2 \times -\frac{1}{8} + 1} \right|$$

$$V = \frac{9}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{80}{\sqrt{3}} v = \frac{80}{\sqrt{3}} \times \frac{9}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 45$$

Q.13 मान लीजिए a तथा b दो अशून्य वास्तविक संख्यायें हैं। यदि $\left(ax^2 + \frac{70}{27bx}\right)^4$ के प्रसार में x^5 का गुणांक $\left(ax - \frac{1}{bx^2}\right)^7$ के प्रसार में x^{-5} के गुणांक के बराबर है तो $2b$ का मान है -

Ans. [3]

Sol. $T_{r+1} = {}^4C_r (ax^2)^{4-r} \left(\frac{70}{27bx}\right)^r$

$$x^5 \text{ के गुणांक के लिये, } 8 - 2r - r = 5 \Rightarrow r = 1$$

$$\Rightarrow x^5 \text{ का गुणांक} = {}^4C_1 a^3 \left(\frac{70}{27b}\right)$$

$$t_{r+1} = {}^7C_r (ax)^{7-r} \left(-\frac{1}{bx^2}\right)^r$$

$$x^{-5} \text{ के गुणांक के लिये, } 7 - r - 2r = -5 \Rightarrow r = 4$$

$$\Rightarrow x^{-5} \text{ के गुणांक के लिये} = {}^7C_4 a^3 \frac{1}{b^4}$$

$$\Rightarrow {}^4C_1 a^3 \left(\frac{70}{27b}\right) = {}^7C_4 a^3 \frac{1}{b^4} \Rightarrow 2b = 3$$

SECTION 4 (Maximum Marks: 12)

-
- This section contains **FOUR (04)** Matching List Sets.
 - Each set has **ONE** Multiple Choice Question.
 - Each set has **TWO** lists: **List-I** and **List-II**.
 - **List-I** has **Four** entries (P), (Q), (R) and (S) and **List-II** has **Five** entries (1), (2), (3), (4) and (5).
 - **FOUR** options are given in each Multiple Choice Question based on **List-I** and **List-II** and **ONLY ONE** of these four options satisfies the condition asked in the Multiple Choice Question.
 - Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:
 Full Marks : +3 **ONLY** if the option corresponding to the correct combination is chosen;
 Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
 Negative Marks : -1 In all other cases.
-

- Q.14** मान लीजिए α, β तथा γ वास्तविक संख्याएँ हैं। निम्नलिखित रेखिक समीकरण निकाय पर विचार करें -
 $x + 2y + z = 7$
 $x + \alpha z = 11$
 $2x - 3y + \beta z = \gamma$
सूची-I में प्रत्येक प्रविष्टि का सूची-II में सही प्रविष्टि से मिलान करें।

	सूची-I		सूची-II
(P)	यदि $\beta = \frac{1}{2}(7\alpha - 3)$ तथा $\gamma = 28$, तो निकाय होगा	(1)	एक अद्वितीय हल
(Q)	यदि $\beta = \frac{1}{2}(7\alpha - 3)$ तथा $\gamma \neq 28$, तो निकाय होगा	(2)	कोई हल नहीं
(R)	यदि $\beta \neq \frac{1}{2}(7\alpha - 3)$ जहाँ $\alpha = 1$ और $\gamma \neq 28$, तो निकाय होगा	(3)	अपरिमित रूप से अनेक कल
(S)	यदि $\beta \neq \frac{1}{2}(7\alpha - 3)$ जहाँ $\alpha = 1$ और $\gamma = 28$, तो निकाय होगा	(4)	$x = 1, y = -2$ तथा $z = 0$ एक हल के रूप में
		(5)	$x = -15, y = 4$ और $z = 0$ एक हल के रूप में

सही विकल्प है :

- (A) (P) \rightarrow (3); (Q) \rightarrow (2); (R) \rightarrow (1); (S) \rightarrow (4)
(B) (P) \rightarrow (3); (Q) \rightarrow (2); (R) \rightarrow (5); (S) \rightarrow (4)
(C) (P) \rightarrow (2); (Q) \rightarrow (1); (R) \rightarrow (4); (S) \rightarrow (5)
(D) (P) \rightarrow (2); (Q) \rightarrow (1); (R) \rightarrow (1); (S) \rightarrow (3)

Ans. [A]

Sol. $x + 2y + z = 7$

$$x + \alpha z = 11$$

$$2x - 3y + \beta z = \gamma$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 2 & -3 & \beta \end{vmatrix} = 0$$

$$3\alpha - 2(\beta - 2\alpha) - 3 = 0$$

$$7\alpha - 2\beta = 3$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{1}{2}(7\alpha - 3)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 11 & 0 & \alpha \\ \gamma & -3 & \beta \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 11 & \alpha \\ 2 & \gamma & \beta \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 11 \\ 2 & -3 & \gamma \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = 0$$

$$\Rightarrow 33 - 2(\gamma - 22) + 7(-3) = 0$$

$$\gamma = 28$$

$$\Delta_1 = 21\alpha - 2(11\beta - \alpha\gamma) - 33$$

$$= 21\alpha - 22\beta + 2\alpha\gamma - 33$$

$$\Delta_2 = 11\beta - \alpha\gamma - 7(\beta - 2\alpha) + \gamma - 22$$

$$= 14\alpha + 4\beta + \gamma - \alpha\gamma - 22$$

(P) If $\beta = \frac{1}{2}(7\alpha - 3)$ तथा $\gamma = 28$

$$\Delta = 0, \Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 = 0$$

(अनंत अनेक हल)

$x = 11, y = -2$ तथा $z = 0$ दी गई तीनों समीकरणों को संतुष्ट करेगा, इसलिये इसका एक हल है।

(Q) यदि $\beta = \frac{1}{2}(7\alpha - 3)$ तथा $\gamma \neq 28$ तो

$\Delta = 0$, लेकिन $\Delta_3 \neq 0$ इसलिये कोई हल नहीं

(R) यदि $\beta \neq \frac{1}{2}(7\alpha - 3), \alpha = 1$ तथा $\gamma \neq 28$

$\Delta \neq 0, \Delta_3 \neq 0$ इसलिये एक अद्वितीय हल

(S) If $\beta \neq \frac{1}{2}(7\alpha - 3), \alpha = 1, \gamma = 28$

$\Delta \neq 0, \Delta_3 = 0, \Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$, इसलिये एक अद्वितीय हल

$x = 11, y = -2$ तथा $z = 0$ सभी तीन समीकरणों को संतुष्ट करेगा

विकल्प (A) सही है।

Q.15 आवृत्ति वितरण के साथ दिये गये आंकड़ों पर विचार करें -

$$x_i \quad 3 \quad 8 \quad 11 \quad 10 \quad 5 \quad 4$$

$$f_i \quad 5 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \quad 4$$

सूची-I में प्रत्येक प्रविष्टि का सूची-II में सही प्रविष्टि से मिलान करें।

सूची-I	सूची-II
(P) उपरोक्त आंकड़ों का माध्य है।	(1) 2.5
(Q) उपरोक्त आंकड़ों का माध्य का माध्य विचलन है।	(2) 5
(R) उपरोक्त आंकड़ों का माध्यक का माध्य विचलन है।	(3) 6
(S) उपरोक्त आंकड़ों का माध्यक का माध्य विचलन है।	(4) 2.7
	(5) 2.4

सही विकल्प है :

(A) (P) \rightarrow (3); (Q) \rightarrow (2); (R) \rightarrow (4); (S) \rightarrow (5) (B) (P) \rightarrow (3); (Q) \rightarrow (2); (R) \rightarrow (1); (S) \rightarrow (5)

(C) (P) \rightarrow (2); (Q) \rightarrow (3); (R) \rightarrow (4); (S) \rightarrow (1) (D) (P) \rightarrow (3); (Q) \rightarrow (3); (R) \rightarrow (5); (S) \rightarrow (5)

Ans. [A]

Sol. $x \quad \dots \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 8 \quad 10 \quad 11$ (आरोही क्रम)

$$f \quad \dots \quad 5 \quad 4 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \quad 3$$

$$\text{माध्य} = \frac{3 \times 5 + 8 \times 2 + 11 \times 3 + 10 \times 2 + 5 \times 4 + 4 \times 4}{5 + 2 + 3 + 2 + 4 + 4}$$

$$= \frac{15+16+33+20+20+16}{20} = \frac{120}{20} = 6$$

$$\begin{aligned} \text{माध्यिका} &= \frac{1}{2} (10\text{वाँ} + 11\text{वाँ अवलोकन}) \\ &= \frac{1}{2} (5 + 5) = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{माध्य के लिये मानक विचलन}) \\ &= \frac{3 \times 5 + 2 \times 4 + 1 \times 4 + 2 \times 2 + 4 \times 2 + 5 \times 3}{20} = \frac{54}{20} = 2.7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{माध्यिका के लिये मानक विचलन}) \\ &= \frac{2 \times 5 + 1 \times 4 + 0 + 3 \times 2 + 5 \times 2 + 6 \times 3}{20} = \frac{4.8}{20} = 2.4 \end{aligned}$$

$$P \rightarrow 3; Q \rightarrow 2; R \rightarrow 4; S \rightarrow 5$$

\therefore विकल्प A सही है।

Q.16 मान लीजिए l_1 और l_2 क्रमशः रेखाएँ $\vec{r}_1 = \lambda(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ और $\vec{r}_2 = (\hat{j} - \hat{k}) + \mu(\hat{i} + \hat{k})$ है। मान लीजिए X उन सभी तलों H का समुच्चय है जिनमें रेखा l_1 है। एक समतल H के लिए, माना $d(H)$, l_2 तथा H बके बिन्दुओं के मध्य सबसे छोटी संभव दूरी को दर्शाता है।

मान लीजिए H_0 , X में एक समतल है जिसके लिए $d(H_0)$, $d(H)$ का अधिकतम मान है। क्योंकि H, X के सभी समतलों में भिन्न है।

सूची-I में प्रत्येक प्रविष्टि का सूची-II में सही प्रविष्टि से मिलान करें।

	सूची-I		सूची-II
(P)	$d(H_0)$ का मान है।	(1)	$\sqrt{3}$
(Q)	H_0 से बिन्दु $(0, 1, 2)$ की दूरी	(2)	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
(R)	H_0 से मूलबिन्दु की दूरी	(3)	0
(S)	H_0 और समतलों $y = z$, $x = 1$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से मूल बिन्दु की दूरी	(4)	$\sqrt{2}$
		(5)	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

सही विकल्प है:

$$(A) (P) \rightarrow (2); (Q) \rightarrow (4); (R) \rightarrow (5); (S) \rightarrow (1)$$

$$(B) (P) \rightarrow (5); (Q) \rightarrow (4); (R) \rightarrow (3); (S) \rightarrow (1)$$

$$(C) (P) \rightarrow (2); (Q) \rightarrow (1); (R) \rightarrow (3); (S) \rightarrow (2)$$

$$(D) (P) \rightarrow (5); (Q) \rightarrow (1); (R) \rightarrow (4); (S) \rightarrow (2)$$

Ans. [B]

Sol. H_0 वह समतल होगा जिसमें रेखा l_1 होगी तथा l_2 के समांतर होगी।

$$\therefore \text{समांतर समतल } l_1 \text{ तथा } l_2 \text{ का सामान्य सदिश है } \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{j}(1) - \hat{j}(1-1) + \hat{k}(-1)$$

$$= \hat{i} - \hat{k}$$

$$\therefore H_0 : x - z = c \mid_{(0,0,0)}$$

$$\Rightarrow C = 0$$

$$\therefore H_0 : x - z = 0$$

(P) (H से बिन्दु (0, 1, -1) की दूरी $d(H_0) = 1$

$$d = \left| \frac{0 - (-1)}{\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \therefore P \rightarrow 5$$

$$(Q) d = \left| \frac{0 - 2}{\sqrt{2}} \right| = \sqrt{2} \therefore Q \rightarrow 4$$

$$(R) d = \left| \frac{0}{\sqrt{2}} \right| = 0 \therefore R \rightarrow 3$$

(S) प्रतिच्छेदन बिन्दु (1, 1, 1) होगा $\therefore S \rightarrow 1$

$$d = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

\therefore विकल्प (B) सही है।

Q.17 मान लीजिये z एक सम्मिश्र संख्या $|z|^3 + 2z^2 + 4\bar{z} - 8 = 0$ को संतुष्ट करती है। जहाँ \bar{z} , z के सम्मिश्र संयुग्म को दर्शाता है। माना z का काल्पनिक भाग अशून्य है। सूची-I में प्रत्येक प्रविष्टि का सूची-II में सही प्रविष्टि से मिलान करें।

सूची-I	सूची-II
(P) $ z ^2$ बराबर है	(1) 2
(Q) $ z - \bar{z} ^2$ बराबर है	(2) 4
(R) $ z ^2 + z + \bar{z} ^2$ बराबर है	(3) 8
(S) $ z + 1 ^2$ बराबर है	(4) 10
	(5) 7

सही विकल्प है:

(A) (P) \rightarrow (1); (Q) \rightarrow (3); (R) \rightarrow (5); (S) \rightarrow (4) (B) (P) \rightarrow (2); (Q) \rightarrow (1); (R) \rightarrow (3); (S) \rightarrow (5)

(C) (P) \rightarrow (2); (Q) \rightarrow (4); (R) \rightarrow (5); (S) \rightarrow (1) (D) (P) \rightarrow (2); (Q) \rightarrow (3); (R) \rightarrow (5); (S) \rightarrow (4)

Ans. [B]

$$|z|^3 + 2z^2 + 4\bar{z} - 8 = 0$$

Sol. $|z|^3 + 2z^2 + 4z - 8 = 0$

$$2(z^2 - \bar{z}^2) + 4(\bar{z} - z) = 0$$

$$(z - \bar{z})[2(z + \bar{z}) - 4] = 0$$

$$\therefore z = \bar{z} \text{ (असंभव) or } 4x = 4 \Rightarrow x = 1.$$

$$z = 1 + \lambda i \Rightarrow |z| = \sqrt{1 + \lambda^2} \Rightarrow \bar{z} = 1 - \lambda i$$

$$(1 + \lambda^2)^{3/2} + 2(1 - \lambda^2 + 2\lambda i) + 4(1 - \lambda i) - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (1 + \lambda^2)^{3/2} + 2(1 - \lambda^2) = 4$$

$$(1 + \lambda^2)^{3/2} = 2(1 + \lambda^2)$$

$$(1 + \lambda^2)[\sqrt{1 + \lambda^2} - 2] = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 3$$

(अब)

$$(P) |z|^2 = 1 + \lambda^2 = 1 + 3 = 4$$

$$(Q) |z - \bar{z}|^2 = |1 + \lambda i - (1 - \lambda i)|^2 = |2\lambda i|^2 = 4\lambda^2 = 12$$

$$(R) |z|^2 + |z + \bar{z}|^2 = 4 + |(1 + \lambda i) + (1 - \lambda i)|^2 = 4 + 4 = 8$$

$$(S) |z + 1|^2 = |1 + \lambda i + 1|^2 = 4 + \lambda^2 = 4 + 3 = 7$$

$$\therefore P \rightarrow (2), Q \rightarrow (1), R \rightarrow (3), S \rightarrow (5)$$